Lehrbuch

der

Elementar-Mathematik

für

Gymnasien und Realschulen

von

Dr. Hermann Schumann.

Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage,

bearbeitet von

R. Gantzer,

Dr. philos. und Lehrer an der Realschule 1. Ordnung zu Magdeburg.

Erster Theil:
Arithmetik und Algebra.

Zweiter Theil:
Planimetrie.

Dritter Theil:
Ebene Trigonometrie.

Vierter Theil:
Stereometrie.

Fünfter Theil:
Analytische Geometrie.

Berlin,
Weidmannsche Buchhandlung.
1873.

Lehrbuch

der

Arithmetik und Algebra

für

Gymnasien und Realschulen

von

Dr. Hermann Schumann.

Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage,

bearbeitet von

R. Gantzer,

Dr. philos. und Lehrer an der Realschule 1. Ordnung zu Magdeburg.

Berlin,

Weidmannsche Buchhandlung.

1873.

Vorwort zur ersten Auflage.

In einer vieljährigen Praxis hat der Verfasser dieses Lehrbuches immer mehr die Ueberzeugung gewonnen, daß eine, dem Standpunkte der Schüler angepaßte, streng logische Behandlung des arithmetischen Pensums für die geistige Durchbildung derselben sehr nutzbar gemacht werden kann, und daß es als eine einseitige Verwerthung des Stoffes bezeichnet werden muß, wenn wissenschaftliche Strenge der Erzielung einer größeren Fertigkeit in den verschiedenen Operationen nachgesetzt, wohl gar ihr zum Opfer gebracht wird.

Auch die Arithmetik muß dem Schüler als Mathematik geboten werden, d. h. als ein aus dem Begriffe der Zahl heraus folgerichtig sich aufbauendes und gliederndes Ganze, dessen Theile wo möglich nirgends der mathematischen Gewißheit entbehren, nicht aber als ein zum Theil zufälliges Ensemble von Rechnungsarten und Rechnungsregeln. Allerdings ist diese Art der Behandlung beim Beginn des arithmetischen Unterrichtes in der Tertia noch nicht anzuwenden, da sie dann dem Schüler theils noch zu schwierig, theils in ihrer wahren Bedeutung schwer erkennbar ist. Hier ist zur ersten Einführung in die 4 Species mit Buchstaben ein weniger gründliches Verfahren das praktischere, wie man ja auch beim ersten geometrischen Unterrichte die mathematische Strenge etwas zurücktreten läßt. Was aber auf dieser Stufe versäumt ist, muß bei der Repetition des Pensums in der Secunda vollständig nachgeholt werden, und nachher ist der strenge Gang nicht wieder zu verlassen.

In welcher Weise und in welcher Ausdehnung der Verfasser die im Vorstehenden angedeutete Art der Behandlung des arithmetischen Pensums bei der für den mathematischen Unterricht verfügbaren Zeit ohne Nachtheil für die Geometrie für möglich hält, mag das Buch selbst lehren. Nur die eine Bemerkung scheint noch nothwendig, daß die Ausführlichkeit der Behandlung, welche vielleicht manchem Fachgenossen auffallen mag, deshalb absichtlich gewählt ist, damit dem Schüler während des ganzen Zeitraumes, über welchen sich die Behandlung des arithmetischen Pensums in

einzelnen Bruchstücken ausdehnt, Gelegenheit gegeben werde, durch fortwährende Repetition das Ganze sich gegenwärtig zu erhalten.

Solingen, im October 1866. **Der Verfasser.**

Vorwort zur zweiten Auflage.

In der vorliegenden zweiten Auflage des Lehrbuches der Arithmetik und Algebra von Schumann sind mannigfache Aenderungen eingetreten.

Vor allen Dingen erschien es mir nothwendig, die vom Herrn Verfasser vielfach angewendete inductive Methode fast überall durch die deductive zu ersetzen.

Ferner aber glaubte ich, die ersten Abschnitte des Lehrbuches selbst für den ersten arithmetischen Unterricht nutzbarer machen zu können, wenn die Regeln über die 4 Species mit allgemeinen Zahlen möglichst eng an ein Uebungsbuch sich anschlössen, da eine genügende Anzahl von Uebungsaufgaben an den geeigneten Stellen eines Lehrbuches einzuschalten kaum möglich ist. Die ersten zwei Abschnitte lehnen sich deshalb mit Ausnahme sehr weniger Paragraphen an die in der Ueberschrift bezeichneten Paragraphen der weit verbreiteten „Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra" von Prof. Heis an. Theilweis ist dadurch eine völlige Umarbeitung nothwendig geworden, wie z. B. in §§ 28—30 und § 42. Bei Bearbeitung dieser beiden Abschnitte habe ich Manches aus einem Manuscripte entlehnt, dessen Benutzung ich der Güte meines Collegen, des Herrn Dr. Silldorf, verdankte.

Die entsprechenden Paragraphenzahlen der ersten Auflage sind durchgängig in Klammern [ ] beigefügt.

Um dem Anfänger durch Anregung seiner Anschauungskraft möglichst zu Hilfe zu kommen, sind unter Benutzung der jüngst erschienenen Broschüre „Ueber die 4 Species" von Prof. Dr. Hesse an geeigneten Stellen einige Figuren eingeschaltet worden.

Neu hinzugefügt sind u. A. einige Methoden zur Auflösung der biquadratischen Gleichungen, das Moivre'sche Theorem und die Lösung der binomischen Gleichungen.

Möge das Lehrbuch auch in der umgearbeiteten Form den Beifall der Herren Fachgenossen finden.

Magdeburg, 2. Juli 1873. Dr. **Gantzer.**

Inhalt.

Seite

Einleitung § 1—4. 1
Kapitel I. Uebersicht über die verschiedenen Rechnungsarten § 5—11. . . . 2
Kapitel II. Von den 4 Grundrechnungsarten.
A. Lehrsätze der Addition und Subtraction § 12—27. 7
B. Erweiterung des Zahlbegriffs durch die Subtraction § 28—32. . . 16
C. Lehrsätze der Multiplikation § 33—40. 20
D. Lehrsätze der Division und Erweiterung des Zahlbegriffes durch die Division § 41—55. 26
E. Von der Null § 56. 34
Kapitel III. Von den Verhältnissen und Proportionen § 57—60. 35
Kapitel IV.
A. Lehrsätze des Potenzirens § 61—64. 40
B. Erweiterung des Potenzbegriffes § 65—67. 44
Kapitel V. Von den Zahlensystemen und den Systembrüchen § 68—73. . . 47
Kapitel VI.
A. Erklärung und Lehrsätze des Radicirens § 74—76. 57
B. Erweiterung des Zahlbegriffes durch das Radiciren § 77. 63
C. Von den Quadrat- und Cubikwurzeln § 78—82. 64
D. Rechnungen mit irrationalen Wurzeln, besonders Quadratwurzeln § 83. 69
E. Imaginäre Wurzeln, besonders Quadratwurzeln, und complexe Zahlen. § 84—85. 72
Kapitel VII. Von den Logarithmen § 86—91. 75
Kapitel VIII. Von den Gleichungen § 92—93. 81
A. Einfache Gleichungen mit einer Unbekannten § 94. 83
B. Einfache Gleichungen mit mehreren Unbekannten § 95. 85
C. Quadratische Gleichungen § 96—100. 87
D. Cubische Gleichungen mit einer Unbekannten § 101—103. 94
E. Biquadratische Gleichungen mit einer Unbekannten § 104. 102
F. Unbestimmte Gleichungen ersten Grades § 105. 105
G. Von der Synthesis der algebraischen Gleichungen § 106—107. . . 105
Kapitel IX. Von den einfachen Reihen und ihren Anwendungen auf Zinseszins- und Rentenrechnung § 108—115. 111
Kapitel X. Von den Kettenbrüchen § 116—126. 119

Seite
Kapitel XI. Diophantische Gleichungen § 127—130. 130
Kapitel XII. Combinationslehre § 131—144. 134
Kapitel XIII. Binomischer Lehrsatz § 145—147. 142
Anhang I. Von der Theilbarkeit der ganzen Zahlen § 148—155. 145
Anhang II. Von den Reihen höherer Ordnungen § 156—165. 151
Anhang III. Das Moivre'sche Theorem und seine Anwendung zur Lösung binomischer Gleichungen § 166—172. 160

Einleitung.

§ 1.

Arithmetik (Zahlenkunst) ist der Theil der Mathematik, welcher es mit den Größen der Menge oder Zahlgrößen zu thun hat.

Zahlgröße ist der Inbegriff einer gewissen Menge gleichartiger Dinge, der sogenannten Einheiten.

Die Zahlgrößen zerfallen

einestheils in { unbenannte ohne / benannte mit } Angabe der **Art** der Einheiten,

anderntheils in { bestimmte mit genauer / unbestimmte mit nur allgemeiner } Angabe der **Menge** der Einheiten.

Deshalb spaltet sich die Arithmetik in 4 Theile:

1) Lehre von den bestimmten unbenannten Zahlen
2) „ „ „ „ benannten „
3) „ „ „ unbestimmten unbenannten „
4) „ „ „ „ benannten „ .

Die Zahlzeichen für die bestimmten Zahlen sind die Ziffern, als Zeichen für die unbestimmten Zahlen gebraucht man die Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets. Deshalb heißen die beiden ersten Theile **reines** und **angewandtes Zifferrechnen**, die beiden letzten reine und angewandte

Buchstabenrechnung.

§ 2.

Ein Buchstabe ist das Zeichen für eine unbestimmte Zahl. Kann somit jeder Buchstabe **jede** Zahl vertreten, also auch a und b dieselbe

Zahl, so muß jeder Buchstabe doch im Laufe derselben Rechnung unverändert ein und dieselbe Zahl bedeuten. Durch diese Allgemeindeutigkeit der Buchstaben erreicht die Buchstabenrechnung ihren Zweck: die bisher im Zifferrechnen durch den Schluß von vielen Fällen auf alle als giltig dargestellten Gesetze als allgemeingiltig zu **beweisen** und an sie andere ebenso allgemeingiltige Gesetze anzuknüpfen.

§ 3.

Sollen 2 Buchstaben z. B. a und b oder 2 Buchstabenverbindungen dieselbe bestimmte Zahl bedeuten, so wird dieses durch das zwischen sie gesetzte Zeichen der Gleichheit angedeutet, $a = b$; diese Gleichsetzung heißt eine Gleichung, die gleichgesetzten Ausdrücke ihre Seiten. Sollen 2 Buchstaben oder Buchstabenverbindungen dagegen nicht dieselbe Zahl bedeuten, so verbindet man sie ebenso durch das Zeichen der Ungleichheit, $a > b$ (lies a größer als b) oder $a < b$ (l. a kleiner als b), und erhält hierdurch eine Ungleichung.

Anmerkung. Die Bedeutung der Zeichen begründet die Geometrie.

§ 4 [§ 5].

Die Grundsätze, welche auch für die Arithmetik als Grundlage angenommen werden, sind:

1) Jede Größe ist sich selbst gleich.
2) Das Ganze ist gleich der Summe aller seiner Theile, also größer als jeder Theil.
3) Wenn 2 Größen einer dritten gleich sind, so sind sie unter einander gleich.
4) Gleiche Größen lassen sich vertauschen.
5) Gleiche Rechnungen, mit gleichen Größen vorgenommen, geben gleiche Resultate.

I. Kapitel.

Uebersicht über die verschiedenen Rechnungsarten.

§ 5 [§ 6] (Heis § 1).

Rechnen heißt: aus 2 oder mehreren Zahlen nach bestimmten Gesetzen eine neue Zahl herleiten.

Als erste Rechnungsart folgt aus dem Begriffe der Zahl diejenige, welche die Einheiten zweier oder mehrerer Zahlen in eine neue Zahl zusammenfaßt: die Addition.

Zwei oder mehrere Zahlen addiren bedeutet also, eine neue Zahl finden, welche soviel Einheiten enthält, als die gegebenen Zahlen zusammen. Die neue Zahl heißt Summe; dieselbe enthält demnach soviel Einheiten, als die gegebenen Zahlen, die Addenden oder Summanden oder Glieder zusammen.

Um anzudeuten, daß die beiden Zahlen a und b addirt werden sollen, verbindet man sie durch das Additionszeichen + (lies plus). In

$$a + b = c$$

sind also a und b die Summanden (Glieder der Summe), und c ist die Summe.

Die Summanden müssen unter einander und mit der Summe gleiche Benennung haben.

§ 6 [§ 7] (Heis § 2).

Insofern die Addition aus den Addenden die Summe zusammensetzt, fordert sie als Gegensatz eine solche Rechnung, welche die Summe mit Hülfe eines gegebenen Addenden auflöst — die Subtraction. Zwei Zahlen subtrahiren, oder eine Zahl um die Einheiten einer anderen vermindern, bedeutet also, die eine als Summe ansehen, die andere als einen gegebenen Addenden und dazu den zugehörigen 2. Addenden suchen, oder: eine 3. Zahl suchen, welche, zur zweiten addirt, die erste zur Summe giebt. Die frühere Summe heißt jetzt Minuendus, der gegebene Addend heißt Subtrahendus, der gesuchte Addend dagegen Differenz, Unterschied oder Ueberschuß. Das Subtrahiren kommt also dadurch zu Stande, daß man von der ersten Zahl (dem Minuendus) aus um die Einheiten der zweiten Zahl (des Subtrahendus) rückwärts zählt. Um anzudeuten, daß die Zahl b von der Zahl a subtrahirt werden soll, verbindet man beide Zahlen durch das Subtractionszeichen — (l. minus), der Art, daß dies Zeichen stets vor dem Subtrahendus steht. Es ist also

Minuendus — Subtrahendus = Differenz oder

$$a - b = c.$$

Aus der Erklärung der Differenz folgt, daß sie, zum Subtrahendus addirt, den Minuendus als Summe geben muß, d. h. es muß

Differenz + Subtrahendus = Minuendus oder

$c + b = a$ sein.

Umgekehrt muß, wenn

$c + b = a$ ist, auch $a - b = c$ sein.

Ferner müssen zufolge der Erklärung des Subtrahirens **Minuendus**, **Subtrahendus** und **Differenz** gleiche Benennung haben.

Anmerkung. Da der Subtrahendus erst durch Vermehrung um die Differenz dem Minuendus gleich werden soll, so muß der Minuendus stets größer sein als der Subtrahendus.

§ 7 [§ 8] (Heis § 3).

Werden in einer Additionsaufgabe alle Addenden einander gleich, so schreibt man die entstehende Summe in abgekürzter Form, indem man den Addenden nur einmal schreibt und ihm die Zahl beifügt, die angiebt, wie oft er vorhanden war. Diese specielle Art von Summe heißt **Produkt**, dieser Specialfall des Addirens heißt **Multipliciren**.

Zwei Zahlen multipliciren bedeutet also, die eine Zahl so oft als Addend setzen, als die andere Einheiten enthält. Die Zahl, welche mehrere Male als Addend gesetzt werden soll, heißt **Multiplikandus**; die Zahl hingegen, welche angiebt, wie oft der Multiplikandus als Addend gesetzt werden soll, wird **Multiplikator** genannt. Multiplikandus und Multiplikator führen auch den gemeinsamen Namen **Factoren**.

Das Zeichen der Multiplikation ist $\times$ oder $\cdot$ (sprich mal). Im Allgemeinen steht der Multiplikandus vor, der Multiplikator hinter diesem Zeichen. Also:

Multiplikandus $\times$ Multiplikator $=$ Produkt.

Wenn wenigstens einer der beiden Factoren eine Buchstabengröße ist, pflegt das Multiplikationszeichen fortgelassen zu werden:

$$a \times b = a \cdot b = ab.$$

Es darf aber niemals fehlen, wenn zwei bestimmte Zahlen zu multipliciren sind.

Jedes Produkt ist demnach eine Summe, deren Addenden gleich dem Multiplikandus sind, und deren Addendenzahl der Multiplikator angiebt. Es ist also

$$a \cdot 2 = a + a \text{ und } a \cdot b = ab = \underset{1}{\overset{}{a}} + \underset{2}{a} + \underset{3}{a} + \underset{4}{a} \cdots\cdots + \underset{b}{a}.$$

Daraus geht hervor, daß der **Multiplikator** stets eine **ganze, unbenannte Zahl** sein muß, und daß **Multiplikandus** und **Produkt** stets **gleiche Benennung** haben müssen.

Anmerkung 1. Aus der Erklärung folgt, daß $a \cdot 1 = a$ und $1 \cdot a = a$ ist.

Anmerkung 2. Die Definition kann man auch so fassen: a mit b multipliciren bedeutet, aus a eine neue Zahl ebenso entstehen lassen, wie b aus der Einheit entstanden ist.

§ 8 [§ 9] (Heis § 4).

Ebenso, wie in § 6 die Addition, fordert auch die Multiplikation ihren Gegensatz in der — Division.

Zwei Zahlen dividiren bedeutet demnach, die eine von ihnen als Produkt, die andere als einen Factor des Produktes ansehen, und dazu den 2. Factor suchen, oder: eine 3. Zahl suchen, welche mit der 2. multiplicirt, die 1. zum Produkt giebt. Das frühere Produkt, d. h. die Zahl, welche dividirt werden soll, heißt Dividendus; den einen gegebenen Factor, d. h. die Zahl, durch welche dividirt werden soll, nennt man Divisor; das Resultat der Division führt den Namen Quotient.

Um anzudeuten, daß die Zahl a durch die Zahl b dividirt werden soll, verbindet man beide Zahlen durch das Zeichen : oder — (spr. durch). Der Dividendus steht vor dem Kolon oder oberhalb des Striches, der Divisor hinter dem Kolon oder unterhalb des Striches:

$$\text{Dividendus} : \text{Divisor} = \text{Quotient}, \quad \frac{\text{Dividendus}}{\text{Divisor}} = \text{Quotient}$$

$$a : b = c, \quad \frac{a}{b} = c.$$

Die charakteristische Eigenschaft des Quotienten ist nach Obigem die, daß er, mit dem Divisor multiplicirt, den Dividendus zum Produkt giebt, also: Divisor $\times$ Quotient = Dividendus oder $b \cdot c = a$; ebenso folgt aus $b \cdot c = a$ auch $a : b = c$.

Wenn der Dividendus benannt ist, so muß der Divisor unbenannt oder gleichbenannt sein; im ersten Falle hat der Quotient dieselbe Benennung wie der Dividendus, im andern Falle ist er unbenannt.

Anmerkung 1. Aus der Erklärung folgt, daß die Division nur dann ausführbar ist, wenn der Divisor als Factor im Dividendus enthalten ist, ferner daß $a : 1 = a$ ist.

Anmerkung 2. Die Division läßt sich auch als wiederholte Subtraction fassen. Zwei Zahlen dividiren bedeutet demnach, angeben, wie oft sich die eine (Divisor) von der anderen (Dividend) abziehen läßt.

§ 9 [§ 10] (Heis § 5).

Wie die Addition in einem Specialfalle zur Multiplikation wird, so geht aus dem Multipliciren das Potenziren hervor, wenn die zu multiplicirenden Zahlen einander gleich sind.

Eine Zahl mit einer anderen potenziren bedeutet also, die eine so oft als Factor setzen, als die andere Einheiten

enthält. Die Zahl, welche mehrere Male als Factor gesetzt werden soll, heißt Grundzahl (Basis, Dignandus), die Zahl, welche die Anzahl der gleichen Factoren angiebt, wird (Potenz-) Exponent genannt, und das durch die Multiplikation entstehende Produkt führt den Namen Potenz. Jede Potenz ist demnach ein Produkt von gleichen Factoren, in welchem jeder Factor gleich der Grundzahl, die Anzahl der gleichen Factoren aber gleich dem Potenzexponenten ist. Man bezeichnet eine Potenz in abgekürzter Form dadurch, daß man nur einen der gleichen Factoren und oben rechts von demselben die Zahl schreibt, welche angiebt, wie oft jene Zahl als Factor zu setzen ist:

$$\text{Grundzahl}^{\text{Exponent}} = \text{Potenz}.$$

Wenn die Grundzahl mit a, und der Exponent mit m bezeichnet wird, so ist also:

$$\underset{1}{a} \cdot \underset{2}{a} \cdot \underset{3}{a} \cdot \underset{4}{a} \cdot \underset{5}{a} \cdots\cdots \underset{m}{a} = a^m$$ (lies a hoch m oder a zur m. Potenz).

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8;\quad 3 \cdot 3 = 3^2 = 9.$$

Grundzahl, Exponent und Potenz können nur unbenannte Zahlen sein.

Anmerkung 1. $a^1 = a$, $1^m = 1$.

Anmerkung 2. Die 2. Potenz a^2 führt auch den Namen Quadrat, die 3. Potenz a^3 den Namen Kubus. Den Grund für diese Namen, sowie für den Namen Potenz giebt die Geometrie.

Zusatz. Die Definition kann man auch so fassen: a mit m potenziren heißt, die Einheit m mal mit a multipliciren.

§ 10 [§ 11].

Auch das Potenziren erfordert seinen Gegensatz in einer neuen Rechnung. Da aber, wie später gezeigt wird, zwar die Summe bei Vertauschung der Addenden und das Produkt bei Vertauschung der Factoren, nicht aber die Potenz bei Vertauschung des Dignanden und Exponenten (3^2 und 2^3) ungeändert bleibt, so führt dieser Gegensatz hier zu einer doppelten Rechnung. Die eine derselben löst die gegebene Potenz auf mit Hülfe des gegebenen Exponenten und heißt Radiciren (Wurzelausziehen), die andere mit Hülfe des gegebenen Dignanden und heißt Logarithmiren. Die Erklärung dieser beiden Rechnungsarten wird unten folgen.

§ 11 [§ 4] (Heis § 6).

Will man den Werth einer Summe oder Differenz bezeichnen, ohne ein neues Buchstabenzeichen dafür einzuführen, so schließt man die Summe oder Differenz in Klammern ( ):

Die Summenform a + b liefert so den Summenwerth (a + b).

Die Differenzform a — b „ „ „ Differenzwerth (a — b).

Ebenso schließt man jede Verbindung von zwei oder mehreren Buchstaben in Klammern, sobald man andeuten will, daß die Verbindung als ein Ganzes betrachtet werden soll. Wenn ein solches Ganze mit neuen Buchstabengrößen oder ähnlichen Ganzen aufs Neue als Ganzes zusammengefaßt werden soll, so tritt eine neue Klammer { } ein, Klammer 2. Klasse genannt. In dieser Weise wird in regelmäßigem Wechsel der Gestalt und in zunehmender Größe jeder Gestalt fortgefahren.

Fällt umgekehrt eine solche Klammer fort, d. h. wird dieselbe aufgelöst, so ist damit gesagt, daß das Ganze in seine Theile zerfällt. Es ist dabei zu beachten, daß, wenn ein solches zusammengesetztes Ganzes mehrere, in einander eingeschobene Klammern enthält, die Klammern stets von innen heraus aufgelöst werden müssen; z. B.

$$17-[8-\{(5-1)+3\}]=17-[8-\{4+3\}]=17-[8-7]=17-1=16.$$

$$\begin{aligned}50+3\cdot(39-[4+5\cdot\{3\cdot(8-6)-1\}]) &= 50+3\cdot(39-[4+5\cdot\{3\cdot 2-1\}])\\ &= 50+3\cdot(39-[4+5\cdot 5]) = 50+3\cdot(39-29)\\ &= 50+3\cdot 10 = 80.\end{aligned}$$

II. Kapitel.

Von den 4 Grundrechnungsarten.

A. Lehrsätze der Addition und Subtraction.

§ 12 [§ 14] (Heis § 7).

I. Unmittelbar aus dem Begriff der Addition und der Summe, sowie aus der Bedeutung der Klammern folgt, daß

1) $(a+b)=(b+a)$ und $a+b=b+a$ ist.

2) $(a+b+c)=(a+c+b)=(b+a+c)=(b+c+a)$ $=(c+a+b)=(c+b+a)$

und ebenso ohne Klammern $a+b+c=a+c+b$ etc.

3) ebenso für 4 und mehr Addenden.

d. h. in Worten:

In jeder Additionsaufgabe oder Summe kann man die

Addenden beliebig *verstellen*. Denn die Reihe von a Einheiten, zu denen b Einheiten addirt worden sind, wie z. B.

$$\overbrace{1}^{1}+\overbrace{1}^{2}+\overbrace{1}^{3}+\overbrace{1}^{4}+\cdots+\overbrace{1}^{a}+\overbrace{1}^{1}+\overbrace{1}^{2}+\overbrace{1}^{3}+\cdots+\overbrace{1}^{b}$$

erscheint von rechts nach links als eine Reihe von b Einheiten, zu denen a Einheiten addirt worden sind.

II. Die Regel des Zifferrechnens

$$(13+9)+17=(13+17)+9=13+(17+9)=39$$

lautet in Buchstaben

$$(a+b)+c=(a+c)+b=a+(b+c)$$

und liefert die Regel: *Eine Zahl wird zu einer Summe addirt, indem man sie zu einem der Addenden addirt und die erhaltene Summe um den anderen Addenden vermehrt.*

Die Umstellung

$$a+(b+c)=(a+b)+c=(a+c)+b$$

beweist die 2. Regel: *Eine Summe wird zu einer einfachen Zahl addirt, indem man ihre Addenden der Reihe nach addirt. Beide Sätze lassen sich offenbar auch auf mehrtheilige Summen ausdehnen.*

§ 13 (Heis § 7).

Da durch die Buchstaben unbestimmte Zahlenwerthe dargestellt werden, so kann jede Rechnung mit Buchstabengrößen nur *angedeutet* werden. So z. B. ist es ebenso wenig möglich, die beiden Zahlen a und b zu addiren, als irgend eine andere Rechenoperation mit ihnen ausführen; ihre Summe, ihr Produkt u. s. w. kann nur durch a + b, durch ab u. s. w. angedeutet werden.

Wenn aber die Summanden einer Summe durch *dieselben Buchstaben* bezeichnet sind, d. h. gleiche Werthe besitzen, so wird nur einer der Summanden geschrieben und demselben die Zahl vorgesetzt, welche die Anzahl der gleichen Summanden angiebt; oder mit anderen Worten: Wenn der Multiplikator eines Produktes eine bestimmte Zahl ist, so wird er vorangesetzt; z. B.

$$\overbrace{a}^{1}+\overbrace{a}^{2}+\overbrace{a}^{3}+\overbrace{a}^{4}=4a \text{ oder } \overbrace{ab}^{1}+\overbrace{ab}^{2}+\overbrace{ab}^{3}+\overbrace{ab}^{4}+\overbrace{ab}^{5}+\overbrace{ab}^{6}=6ab.$$

Die Zahl, welche die Anzahl der gleichen Summanden angiebt, d. h. der Multiplikator, führt in diesem Falle den Namen *Coëfficient*, und die Buchstabengröße oder die ganze Zusammenstellung von Buchstabengrößen heißt die *Hauptgröße*. Eine solche, mit einem Coëfficienten

versehene Buchstabengröße hat man als eine benannte Zahl anzusehen, in welcher die Buchstabengröße die Benennung, und der Coëfficient die Anzahl der benannten Einheiten angiebt. Deshalb können nur Zahlen mit gleichen Buchstaben- (Haupt-) Größen addirt werden. Die Addition von Zahlen mit gleichen Buchstabengrößen wird ausgeführt, indem man der Summe der Coëfficienten die gemeinsame Buchstabengröße hinzufügt. Denn

$$2a + 4a \text{ ist } = \underbrace{a}_{1}+\underbrace{a}_{2} + \underbrace{a}_{1}+\underbrace{a}_{2}+\underbrace{a}_{3}+\underbrace{a}_{4} = \underbrace{a}_{1}+\underbrace{a}_{2}+\underbrace{a}_{3}+\underbrace{a}_{4}+\underbrace{a}_{5}+\underbrace{a}_{6} = 6a.$$

Ebenso ist

$$5ac + 7ac = 12ac;\ 6a + 15b + 3a = 9a + 15b$$
$$14b + (9c + 8b) = 22b + 9c.$$

§ 14 [§ 15].

Aus der Erklärung: Eine Zahl heißt größer als eine andere, wenn man zur letzteren noch eine 3. Zahl addiren muß, um die erstere zu erhalten, folgt, daß sich jede Ungleichung $a > b$ durch eine Gleichung $a = (b + x)$ ersetzen läßt und daraus ergeben sich folgende Lehrsätze über Addition ungleicher Größen:

1) Zu Gleichem Größeres addirt giebt Größeres:

Vor. $a = b$
$c > d$

Beh. $a + c > b + d$

Bw. $c > d$ Vor.
$c = (d + x)$ Def.
$a = b$ Vor.
$a + c = b + (d + x)$ Gl. zu Gl.
$= (b + d) + x$ (§ 12)
$a + c > b + d$ Definition.

2) Zu Größerem Gleiches addirt giebt Größeres.

Vor. $a > b$
$c = d$

Beh. $a + c > b + d$

Beweis wie in 1.

3) Zu Größerem Größeres addirt giebt Größeres.

Vor. $a > b$
$c > d$

Beh. $a + c > b + d$

Beweis analog wie in 1.

§ 15 [§ 7] (Heis § 8).

Lehrsatz I. Addition und Subtraction, an und mit derselben Zahl der Reihe nach vollzogen, vernichten sich.

Behauptg. $(a - b) + b = a$; $(a + b) - b = a$.

Beweis. Da $(a - b)$ die Differenz von a und b darstellt, so muß nach der Erklärung der Subtraction $(a - b) + b = a$ sein.

Entsprechend ist

$$(7a - 9b) + 9b = 7a; \quad (14x - [3y + 4z]) + [3y + 4z] = 14x.$$

Da ferner zu der Zahl a die Zahl b addirt werden muß, um $(a + b)$ zu erhalten, so ist $(a + b) - b = a$.

Dem entsprechend ist

$(6a + 15b) - 15b = 6a$; (24 Mark + 9 Frcs.) — 24 Mark = 9 Frcs.

Lehrsatz II. Durch Subtraction einer Differenz von ihrem Minuendus erhält man den Subtrahendus.

Beh. $a - (a - b) = b$.

Beweis. Nach der Erklärung im § 6 folgt aus $a - b = c$ umgekehrt $c + b = a$ oder, durch Vertauschung der Summanden, $b + c = a$. Aus letzterer Gleichung aber folgt auch $a - c = b$. Da demnach in jeder Subtractionsaufgabe Subtrahendus und Differenz vertauscht werden können, so ergiebt sich aus $a - b = (a - b)$ durch Vertauschung $a - (a - b) = b$.

Dem entsprechend ist

$15a - (15a - 23b) = 23b$; a Guld. — (a Guld. — b Mark) = b Mark.

§ 16 [§ 16] (Heis § 9. I.).

Die Regel des Kopfrechnens

$68 - 20 = (60 + 8) - 20 = (60 - 20) + 8$; $68 - 5 = (60 + 8) - 5 = 60 + (8 - 5)$

lautet in Buchstaben:

$$(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c)$$

und enthält den Satz:

Eine Zahl wird von einer Summe subtrahirt, indem man sie von einem der Summanden subtrahirt und zu der erhaltenen Differenz den andern Summanden addirt.

Beweis. Soll $(a - c) + b$ die richtige Lösung der Subtractionsaufgabe $(a + b) - c$ sein, so muß sie, zu dem Subtrahendus c der Aufgabe addirt, den Minuendus $(a + b)$ geben. Nun ist nach Früherem:

$$\{(a - c) + b\} + c = \{(a - c) + c\} + b = a + b,$$

also ist die Lösung richtig. Ebenso ist

$$\{a + (b - c)\} + c = a + \{(b - c) + c\} = a + b,$$

also auch die 2. Lösung richtig.

§ 17 [§ 19] (Heis § 9. I.).

Die Regel des Kopfrechnens

$$98+76=(100-2)+76=(100+76)-2$$

lautet in Buchstaben

$$(a-b)+c=(a+c)-b,$$

ist also die Umkehrung des Satzes im § 16 und enthält den Satz: Eine Zahl wird zu einer Differenz addirt, indem man sie zum Minuendus addirt und von der erhaltenen Summe den Subtrahendus subtrahirt.

Anmerkung. Vergl. unten § 22 Anm.

§ 18 (Heis § 9. II.).

Die Regel des Kopfrechnens

$$56-17=(57-1)-17=(57-17)-1$$

lautet in Buchstaben

$(a-b)-c=(a-c)-b$ und in Worten: Eine Zahl wird von einer Differenz subtrahirt, indem man sie vom Minuendus subtrahirt und von der erhaltenen Differenz den Subtrahendus subtrahirt. (Oder: die Reihenfolge wiederholter Subtraction ist gleichgiltig.)

Beweis. Soll die Zahl $(a-c)-b$ die Differenz von $(a-b)$ und c sein, so muß sie, zum Subtrahendus c addirt, den Minuendus $(a-b)$ geben. Es ist aber
$(a-c)-b+c$ zufolge § 17 $=(a-c)+c-b$; und da $(a-c)+c=a$ ist, so ist $(a-c)-b+c=(a-b)$.

Anmerkung. Vergl. § 19 Anm.

§ 19 [§ 17] (Heis § 10).

Die Regel des Zifferrechnens

$$90-73=90-(70+3)=(90-70)-3;$$
$$68-27=68-(20+7)=(68-7)-20$$

lautet in Buchstaben

$a-(b+c)=(a-b)-c=(a-c)-b$ und in Worten: Eine Summe wird subtrahirt, indem man ihre Summanden einzeln in beliebiger Reihenfolge subtrahirt.

Zum Beweise addire man den Subtrahendus $(b+c)$. Zufolge § 17 ist aber $(a-b)-c+(b+c)=(a-b)+(b+c)-c$ und zufolge § 12 $=(a-b)+b+c-c=a$. Demnach ist
$(a-b)-c$ die richtige Differenz von a und $(b+c)$.

Anmerkung. Die Umkehrung dieser Formel, nämlich

$$(a-b)-c=a-(b+c)$$ liefert den Satz (§ 18):

Eine Zahl kann auch dadurch von einer Differenz subtrahirt werden, daß man sie zum Subtrahendus addirt und die erhaltene Summe vom Minuendus subtrahirt.

Zusatz. Ebenso ist

$$a-(b+c+d+\cdots)=\{(a-b)-c\}-d-\cdots\cdots\cdots$$
$$=\{(a-c)-b\}-d-\cdots\cdots \text{ u. s. w.}$$

§ 20 [§ 21] (Heis § 11. I.).

Die Regel des Zifferrechnens

$$58+198=58+(200-2)=(58+200)-2=(58-2)+200$$

lautet in Buchstaben

$$a+(b-c)=(a+b)-c=(a-c)+b,$$

ist also die Umkehrung von § 16 und liefert den Satz:

Eine Differenz wird zu einer Zahl addirt, indem man den Minuendus addirt und den Subtrahendus subtrahirt, in beliebiger Reihenfolge.

§ 21 (Heis § 11. II.).

Die Regel des Kopfrechnens

$$(84-29)+(16-11)=(84+16)-(29+11)$$

lautet in Buchstaben

$$(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$$

und in Worten:

Zwei Differenzen werden addirt, indem man die Summe der Subtrahenden von der Summe der Minuenden subtrahirt.

Beweis. Soll die Zahl $(a-b)+(c-d)$ die Differenz von $(a+c)$ und $(b+d)$ sein, so muß sie zum Subtrahendus $(b+d)$ addirt, den Minuendus $(a+c)$ geben. Es ist aber nach § 12

$$(a-b)+(c-d)+(b+d)=(a-b)+(c-d)+b+d$$
$$=(a-b)+b+(c-d)+d=a+c.$$

Also ist $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$.

§ 22 [§ 18] (Heis § 12).

Die Regel des Kopfrechnens

$$136-98=136-(100-2)=(136-100)+2=(136+2)-100$$

lautet in Buchstaben

$$a-(b-c)=(a-b)+c=(a+c)-b$$

und in Worten:

Eine Differenz wird von einer Zahl subtrahirt, indem man den Minuendus subtrahirt und den Subtrahendus addirt, in beliebiger Reihenfolge.

Beweis. Zum Beweise addirt man zu $(a-b)+c$ den Subtrahendus $(b-c)$; nach § 12 und § 20 ist

$$(a-b)+c+(b-c)=(a-b)+(b-c)+c=(a-b)+b-c+c.$$

Dies ist aber $= a$. Demnach ist $a-(b-c)=(a-b)+c$.

Der 2. Theil wird bewiesen mit Hülfe von § 17.

Anmerkung Die Umkehrung dieser Formel, nämlich

$(a-b)+c=a-(b-c)$ liefert den Satz (§ 17):

Eine Zahl kann auch dadurch zu einer Differenz addirt werden, daß man sie vom Subtrahendus subtrahirt und die erhaltene Differenz vom Minuendus subtrahirt.

§ 23 (Heis § 13[a]).

Aus denselben Gründen, wie oben im § 13, folgt, daß die Subtraction zweier unbestimmten Zahlen nur dann ausgeführt werden kann, wenn sie gleiche Hauptgrößen enthalten, und daß **Zahlen mit gleichen Hauptgrößen subtrahirt werden, indem man der Differenz der Coëfficienten die gemeinsame Hauptgröße hinzufügt.**

Demnach ist $5a-3a=2a$; $7abc-3abc=4abc$.

§ 24. Erklärung.

Jede Verbindung von Zahlen durch Rechenzeichen wird **algebraische Formel** (**Aggregat**) genannt. Eine Formel heißt **eingliedrig** (**ein Monomium**), wenn die Verbindung der Zahlen durch das **Multiplikations- oder Divisionszeichen** bewirkt wird (Produkt, Quotient, Potenz), z. B.

$$ab,\ 7a,\ 27xyz,\ (p:q),\ (10b:7c),\ a^{11},\ 9b^6c^2.$$

Eine Formel heißt aber **zwei- oder mehrgliedrig** (ein **Binomium** oder ein **Polynomium**), wenn die Verbindung durch **ein oder mehrere Additions- oder Subtractionszeichen** bewirkt wird (Summe, Differenz), z. B.

$$a+b,\ 9c+7d,\ 5e^3+10g^2;\ a+b+c,\ 36a-3b^2+c^5-8d \text{ u. s. w.}$$

Unter **Glied eines Polynomiums** hat man jeden Theil desselben zu verstehen, der mit allen übrigen nur durch das + oder

— Zeichen verbunden ist. Gleichnamig sind solche Glieder, welche dieselben Potenzen derselben Hauptgrößen enthalten.

§ 25 [§ 22] (Heis § 13[a]).

Regeln über das Auflösen und Setzen der Klammern.

Ebenso wie einzelne Zahlen können auch zwei oder mehrere Binome oder Polynome durch Rechenzeichen mit einander verbunden werden; jede einzelne Formel muß dann jedoch in Klammern eingeschlossen werden, da sie als ein Ganzes aufgefaßt werden soll, z. B.

$$(p-q)+(r-s-t+v)-(w+x-y)+z.$$

Ersetzt man die einfachen Rechnungen der § 12—22, wie $(a+b)-c$, $(a-c)+b$ u. s. w. durch die gleichbedeutenden Formeln $a+b-c$, $a-c+b$ u. s. w., so erhält man

1) $a+(b+c+d+e+\cdots\cdots)=a+b+c+d+e+\cdots\cdots$
2) $a+(b-c)=a+b-c=a-c+b$
3) $a-(b+c+d+\cdots\cdots)=a-b-c-d-\cdots\cdots$
4) $a-(b-c)=a-b+c=a+c-b.$

Da ferner nach der Bedeutung der Klammern und nach Vorstehendem:

$$a+(b-c+d)=a+\{(b-c)+d\}=a+(b-c)+d$$
$$=a+b-c+d$$
$$a+(b-c-d)=a+\{(b-c)-d\}=a+(b-c)-d$$
$$=a+b-c-d$$
$$a-(b-c+d)=a-\{(b-c)+d\}=a-(b-c)-d$$
$$=a-b+c-d$$
$$a-(b-c-d)=a-\{(b-c)-d\}=a-(b-c)+d$$
$$=a-b+c+d$$

u. s. w. ist,

so erhält man folgende Regel für das Auflösen der Klammern: Steht vor einer Klammer das Additionszeichen, so läßt man die Klammer ohne Aenderung irgend eines Rechenzeichens fort. Steht aber vor einer Klammer das Subtractionszeichen, so muß man beim Fortlassen der Klammer die Rechenzeichen aller Glieder in die entgegengesetzten verwandeln; das erste Glied in der Klammer gilt dabei stets als Addend, auch wenn es ein Minuend ist.

Befindet sich in einer Klammer eine andere, so wird von innen heraus aufgelöst, z. B.

$$a-\{b-[c+(d-e)]\}=a-\{b-[c+d-e]\}=a-\{b-c-d+e\}$$
$$=a-b+c+d-e.$$

Liest man die einzelnen Resultate rückwärts, also

$$a + b + c = a + (b + c)$$

$$a - b - c = a - (b + c) \text{ u. s. w.,}$$

so hat man folgende Regel für das Setzen der Klammern:

Wenn in einem Polynomium nach einem Additionszeichen eine Klammer gesetzt wird, so bleiben die Rechenzeichen aller in die Klammer eintretenden Glieder ungeändert; wenn aber hinter einem Subtractionszeichen eine Klammer gesetzt wird, so werden die Rechenzeichen aller in die Klammer eintretenden Glieder mit Ausnahme des ersten, welches kein Rechenzeichen erhält, in die entgegengesetzten verwandelt, z. B.

$$a + b - c - d + e - f + g = a + (b - c) - (d - e + f - g).$$

Demnach ist

$(9a + 7b + 3c) + (4a + 9b + 6c) = 13a + 16b + 9c$

$(101x + 39y - 14z) + (41y - 16x) = 85x + 80y - 14z$

$(89a + 28b - 20c + 14d) - (17a - 12b - 5d) = 72a + 40b - 20c + 19d.$

Zusatz. Gleichzeitig enthalten die Formeln

$$a + b + c = a + c + b, \quad a + b - c = a - c + b$$

$$a - b - c = a - c - b \text{ u. s. w.}$$

die Regel, daß in jedem Polynomium die Reihenfolge der Addenden und Subtrahenden gleichgiltig ist.

§ 26 [§ 23] Lehrsatz.

Eine Differenz bleibt ungeändert, wenn man zu ihren Gliedern dieselbe Zahl addirt oder von ihnen dieselbe Zahl subtrahirt.

Beweis. Schreibt man $(a + m)$ statt a in $(a - b)$, also $\{(a + m) - b\}$, so ist dieses nach § 16 $= \{(a - b) + m\}$, also ist die Differenz um m vergrößert; schreibt man dagegen $(b + m)$ statt b, also $\{a - (b + m)\}$, so ist dieses nach § 19 $= \{(a - b) - m\}$ also ist die Differenz um m verkleinert. Daraus folgt

$$\{(a + m) - (b + m)\} = (a - b) \text{ ; ebenso ist}$$

$$\{(a - m) - (b - m)\} = (a - b).$$

§ 27 [§ 24].

Ueber Subtraction ungleicher Größen lassen sich in analoger Weise, wie in § 14 folgende Sätze beweisen:

1) Von Größerem Gleiches subtrahirt läßt Größeres.

2) Von Gleichem Größeres subtrahirt läßt Kleineres.

3) Von Größerem Kleineres subtrahirt giebt Größeres.

Beim Beweise muß man hinzufügen, daß aus der Ungleichung $a < b$ die Gleichung $a = (b - x)$ folgt.

B. Erweiterung des Zahlbegriffs durch die Subtraction.

§ 28 [§ 25].

Schon im § 6 ist darauf hingewiesen worden, daß eine Subtraction nur dann ausführbar sei, wenn der Minuendus größer als der Subtrahendus ist. Da aber in der Algebra ein Buchstabe jeden beliebigen Zahlenwerth darstellen kann, und da sich also selten entscheiden läßt, ob diese Bedingung, daß der Minuendus größer als der Subtrahendus sein muß, erfüllt ist, so wäre eine Anwendung der Subtraction auf Rechnungen mit Buchstabengrößen unmöglich, wenn man von dieser Bedingung nicht Abstand nehmen wollte. Es ist also zu untersuchen, was aus der Differenz $(a - b)$ wird, wenn

1) $a = b$, 2) $a < b$ ist.

§ 29 [§ 26]. Definition der Null.

Wenn in einer Subtractionsaufgabe der Subtrahendus gleich dem Minuendus ist, wie z. B. in $a - a$, so erhält die Differenz c die Form

$(a - a)$ und muß die durch die Gleichung

$$a + c = a$$

ausgedrückte Eigenschaft haben, daß sie zum Subtrahendus addirt, denselben ungeändert läßt. Diese, durch jene Gleichung bestimmte Zahl c heißt Null und wird mit dem Zeichen 0 bezeichnet.

Aus der Gleichung $a + 0 = a$ folgt aber auch $a = a - 0$.

Die Null ist demnach die Zahl, welche jede Zahl ungeändert läßt, wenn sie zu derselben addirt oder von ihr subtrahirt wird.

§ 30 [§ 27]. Algebraische Zahlen.

Wenn aber in einer Subtractionsaufgabe der Subtrahendus größer als der Minuendus ist, wie z. B. in $7 - 11$ oder in $a - b$, falls $b = a + x$ ist, so wird zufolge § 19

$$(7 - 11) = 7 - (7 + 4) = (7 - 7) - 4 = 0 - 4 \text{ und}$$

$$(a - b) = a - (a + x) = (a - a) - x = 0 - x.$$

Solche Differenzen, deren Minuendus 0 ist, schreibt man abgekürzt

(-4), bezügl. $(-x)$. Im Gegensatz hierzu giebt $a-b$, wenn $a>b$, also $a=b+x$ ist,

$$(b+x)-b=(b-b)+x=0+x \text{ oder abgekürzt } (+x) \text{ oder } x.$$

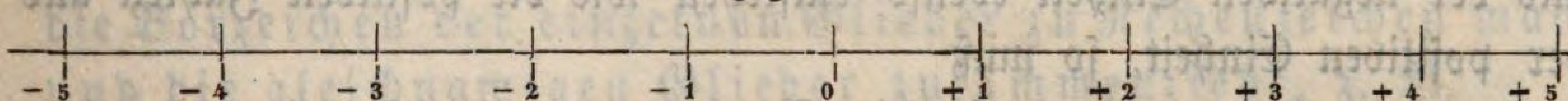
Um demnach alle Subtractionen ausführen zu können, ist man gezwungen, die natürliche Zahlenreihe rückwärts über die Null hinaus fortzusetzen. Die durch diese Erweiterung entstehenden Zahlen werden in derselben Reihenfolge mit denselben Ziffern bezeichnet, wie die ursprünglichen natürlichen Zahlen; zum Unterschiede setzt man vor die letzteren das Zeichen der Addition (oder gar kein Zeichen) und nennt sie positive (additive) Zahlen; vor die durch die Erweiterung der Zahlenreihe entstehenden Zahlen setzt man das Zeichen der Subtraction und nennt sie negative (subtractive) Zahlen. Man erhält so die Zahlenreihe

$$\cdots\cdots -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\cdots\cdots$$

welche sich nach beiden Seiten hin ins Unendliche erstreckt.

Man kann leicht ein geometrisches Bild von den positiven und negativen Zahlen entwerfen. Zu dem Zwecke trage man, wie in Figur 1, auf einer unbegränzten geraden Linie von einem

Fig. 1.



beliebigen Punkte aus, den man als den Nullpunkt ansieht, nach beiden Richtungen hin eine willkürliche Längeneinheit, z. B. 1 Cent. mehrmals ab. Die in der einen Richtung, hier nach rechts hin, abgeschnittenen Strecken stellen die positiven, und die in der entgegengesetzten Richtung, hier nach links hin, abgeschnittenen Strecken die negativen Zahlen dar.

In demselben Gegensatze, wie positive und negative Zahlen, können auch benannte Zahlen zu einander stehen. Wenn z. B. Jemand a Mark Vermögen und b Mark Schulden hat, so besitzt er entweder $(a-b)$ Mark wirkliches Vermögen, wenn $a>b$ ist, oder kein Vermögen, wenn $a=b$ ist, oder $(b-a)$ Mark Schulden, wenn $a<b$, d. h. wenn $(a-b)$ negativ ist. Schulden können also als negatives Vermögen in Rechnung gebracht werden. Ebenso ist es mit Gewinn und Verlust, Fortschritt und Rückschritt, Hebung und Senkung u. a. m.

Wir erhalten somit als erweiterten Zahlbegriff den Begriff einer Zahl mit Vorzeichen, einer sogenannten algebraischen Zahl, im Gegensatz zu den bisherigen Zahlen ohne Vorzeichen, den absoluten Zahlen. Von jetzt an muß man demnach an jeder Zahl einen doppelten Werth unterscheiden, nämlich 1) den absoluten, 2) den algebraischen, der-

gestalt, daß z. B. $(+7)$ und (-7) beide denselben absoluten Werth 7, aber verschiedene algebraische Werthe haben. Die Zeichen $+$ und $-$ erhalten also von jetzt an eine doppelte Bedeutung, insofern sie einmal Rechenzeichen bleiben, anderntheils als Vorzeichen zum Begriff der Zahl in enge Beziehung treten. Diese engere Beziehung muß durch die Klammer angedeutet werden: $(+x)$ ist eine positive Zahl, $+x$ ist ein Addend x.

Man kann nun auch in dem Falle, daß der Minuendus kleiner als der Subtrahendus ist, die Subtraction ausführen, indem man in der Zahlenreihe vom Minuendus aus um die Einheiten des Subtrahendus rückwärts zählt. Ist z. B. der Minuendus a um 1 Einheit kleiner als der Subtrahendus, so wird man durch Rückwärtszählen um $(a+1)$ Einheiten zur Zahl (-1) kommen. Es ist also

$$a-(a+1)=(-1) \text{ oder } (a+1)+(-1)=a.$$

Durch Verminderung des Minuendus und Subtrahendus um a ergiebt sich hieraus

$$0-(+1)=(-1) \text{ oder } (+1)+(-1)=0,$$

d. h. die negative Einheit ist die Zahl, welche, zur positiven Einheit addirt, die Null giebt. Und da die negativen Zahlen aus der negativen Einheit ebenso entstehen wie die positiven Zahlen aus der positiven Einheit, so muß

1) $a+(-a)=0$, d. h. die Summe zweier Zahlen, welche von der Null nach beiden Seiten hin gleich weit entfernt sind, welche also gleichen absoluten Werth haben, muß gleich 0 sein,

und 2) müssen die Glieder der Zahlenreihe rechts von der Null (die positiven) größer als 0 sein und wachsen, je weiter sie sich von der Null entfernen. Dagegen müssen die Glieder der Zahlenreihe links von der Null (die negativen) kleiner als 0 sein und abnehmen, je weiter sie sich von der Null entfernen.

§ 31 [§ 28] (Heis § 13).

Addition der algebraischen Zahlen und der Polynomien.

Nach der so eben gegebenen Erklärung der algebraischen Zahlen muß

1) $(+a)+(+b)=+(a+b)$, und nach § 21 muß

2) $(-a)+(-b)=(0-a)+(0-b)=(0+0)-(a+b)=-(a+b)$

sein, d. h. Zahlen mit gleichen Vorzeichen werden addirt, indem man der Summe ihrer absoluten Werthe das gemeinsame Vorzeichen giebt.

Ferner ist, wenn $a>b$ ist, unter Anwendung von § 20

3) $(+a)+(-b)=a+(0-b)=0+(a-b)=+(a-b)$; und wenn $a<b$ ist, so ist unter Anwendung von § 22. Anm.

4) $(-a)+(+b)=(0-a)+b=0-(a-b)=-(a-b)$, d. h. Zahlen mit ungleichen Vorzeichen werden addirt, indem man der Differenz ihrer absoluten Werthe das Vorzeichen der größeren Zahl giebt.

Die Formel 3) zeigt, daß man eine negative Zahl addirt, indem man ihren absoluten Zahlenwerth subtrahirt, daß also ein Ausdruck wie $a-b+c-d-e\cdots$ identisch ist mit

$$(+a)+(-b)+(+c)+(-d)+(-e)+\cdots,$$

d. h. ein Gemisch von Addenden und Subtrahenden ist in der erweiterten Auffassung der Zahl auch eine Summe, aber eine Summe algebraischer Addenden, eine algebraische Summe. In einer solchen giebt es daher als Rechenzeichen nur $+$, während außerdem jeder Addend sein Vorzeichen hat. Jede algebraische Summe kann in ein Aggregat algebraischer Zahlen verwandelt werden, indem man das Vorzeichen jedes Gliedes zum Rechenzeichen macht.

Deshalb werden mehrere Polynome addirt, indem man die Vorzeichen der einzelnen Glieder zu Rechenzeichen macht und die gleichnamigen Glieder zusammenzieht, z. B.

$$(35a-14b+31c)+(37b+24c-18d)+(4a-16b-18c+28d)=$$

$$\left\{\begin{array}{l} 35a-14b+31c \\ \qquad +37b+24c-18d \\ +4a-16b-18c+28d \end{array}\right\}$$
$$\overline{39a+7b+37c+10d.}$$

§ 32 [§ 28] (Heis § 13).

Subtraction der algebraischen Zahlen und der Polynomien.

Unter Benutzung des § 19 und § 31 ergiebt sich

1) $(+a)-(+b)=a-(0+b)=0+(a-b)=+(a-b)$
$=(+a)+(-b)$; und zufolge § 22 ist

2) $(+a)-(-b)=a-(0-b)=(a-0)+b=a+b$
$=(+a)+(+b)$. Ferner folgt aus Nr. 1

3) $(-a)-(+b)=(-a)+(-b)$, und endlich aus Nr. 2

4) $(-a)-(-b)=(-a)+(+b)$.

Diese 4 Formeln beweisen, daß algebraische Zahlen von einander subtrahirt werden, indem man das Vorzeichen des

Subtrahendus in das entgegengesetzte verwandelt und den so veränderten Subtrahendus zum Minuendus addirt.

Daraus folgt ferner, daß zwei Polynomien von einander subtrahirt werden, indem man jedes Glied des Subtrahendus mit dem seinem Vorzeichen entgegengesetzten Zeichen als Rechenzeichen zu dem gleichnamigen Gliede des Minuendus addirt, z. B.

$$(98x - 44y + 63z) - (24z + 7y - 16x) =$$
$$98x - 44y + 63z + (-24z - 7y + 16x) =$$
$$= \begin{cases} 98x - 44y + 63z \\ +16x - 7y - 24z \end{cases}$$
$$\overline{114x - 51y + 39z.}$$

C. Lehrsätze der Multiplikation.

§ 33 [§ 30] (Heis § 14).

Die Regeln des Kopfrechnens

$$78 \cdot 6 = (70 + 8) \cdot 6 = 70 \cdot 6 + 8 \cdot 6 = 420 + 48$$
$$197 \cdot 8 = (200 - 3) \cdot 8 = 200 \cdot 8 - 3 \cdot 8 = 1600 - 24$$

lauten in Buchstaben:

$$(a \pm b)\, m = am \pm bm$$

und enthalten den Satz:

Eine Summe oder Differenz wird mit einer einfachen Zahl multiplicirt, indem man die einzelnen Glieder multiplicirt und die Producte addirt oder subtrahirt.

Beweis. $(a \pm b)\, m = \overset{1}{\overbrace{(a \pm b)}} + \overset{2}{\overbrace{(a \pm b)}} + \overset{3}{\overbrace{(a \pm b)}} + \cdots \overset{m}{\overbrace{(a \pm b)}}$

$$= (\overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3}{a} + \cdots \overset{m}{a}) \pm (\overset{1}{b} + \overset{2}{b} + \overset{3}{b} + \cdots \overset{m}{b})$$
$$= am \pm bm.$$

Zusatz. Ebenso wird bewiesen, daß

$$m \cdot (a \pm b) = ma \pm m\, b$$

ist.

§ 34 [§ 31] (Heis § 14).

Aufgaben, wie $a + (b - c)\, m$ und $a - (b - c)\, m$ u. s. w., fordern die gleichzeitige Ausführung einer doppelten Rechnung, der Multiplikation und der Addition resp. Subtraction. Diese Ausführung muß stets so getheilt werden, daß erst die Multiplikation ausgeführt, dann die entstandenen Produkte durch Auflösen der Klammern addirt resp. subtrahirt werden, also

$$a + (b - c)\,m = a + (bm - cm) = a + bm - cm$$
$$a - (b - c)\,m = a - (bm - cm) = a - bm + cm$$

u. s. w.

§ 35 [§ 32] (Heis § 14).

Ist ein mehrgliedriger Ausdruck zu multipliciren, so macht man ihn durch Klammern erst zweigliedrig und wendet dann § 33 u. § 34 an:

$$(a + b - c)\,m = \{(a + b) - c\}\,m = (a + b)\,m - cm$$
$$= am + bm - cm;$$
$$(a - b - c)\,m = \{a - (b + c)\}\,m = am - (b + c)\,m$$
$$= am - (bm + cm) = am - bm - cm;$$
$$(a - b - c + d)\,m = \{(a - b) - (c - d)\}\,m$$
$$= (a - b)\,m - (c - d)\,m = am - bm - (cm - dm)$$
$$= am - bm - cm + dm;$$

u. s. w.

Die Resultate enthalten die Regel: Eine algebraische Summe wird mit einer einfachen Zahl multiplicirt, indem man jedes Glied mit ihr multiplicirt und die einzelnen Produkte durch dieselben Rechenzeichen verbindet, durch welche die Glieder verbunden waren.

§ 36 [§ 35] (Heis § 14).

Die Regeln des Kopfrechnens

$56 \cdot 7 + 4 \cdot 7 = (56 + 4) \cdot 7 = 60 \cdot 7$ und

$53 \cdot 7 - 3 \cdot 7 = (53 - 3) \cdot 7 = 50 \cdot 7$ lauten in Buchstaben

$a \cdot m \pm b \cdot m = (a \pm b)\,m$ oder $x \cdot p \pm x \cdot q = x\,(p \pm q)$; diese Formeln sind also die Umkehrungen der Formeln in § 33 und enthalten die Regel:

Die algebraische Summe solcher Produkte, welche einen oder mehrere gemeinschaftliche Factoren besitzen, läßt sich als ein Produkt darstellen, indem man die algebraische Summe der ungleichen Factoren in Klammern schließt und den (oder die) gleichen Factor als Factor der Klammer beifügt.

Dies Verfahren heißt: den (oder die) gemeinschaftlichen Factor absondern (vor die Klammer setzen).

Anmerkung. Es ist hierbei von Wichtigkeit, daran zu denken, daß $a = 1 \cdot a$ ist.

Haben nicht alle Addenden denselben gemeinschaftlichen Factor, sondern nur einige, so faßt man zunächst unter Beobachtung der für das Setzen der Klammern geltenden Regeln durch Klammern die Gruppe derselben als Ganzes zusammen und sondert erst dann ab, wie vorher, z. B.

$$23a - 7b + 7c + 7d - 5p - 5q + 5r = 23a - (7b - 7c - 7d) - (5p + 5q - 5r) = 23a - 7(b - c - d) - 5(p + q - r);$$

$$m - n(p - q) - (m - 2n)(p - q) = m - \{n(p - q) + (m - 2n)(p - q)\} = m - (p - q)\{n + (m - 2n)\} = m - (p - q)(n + m - 2n) = m - (p - q)(m - n).$$

Oft gelingt es auf diese Weise auch solche mehrgliedrige algebraische Summen eingliedrig zu machen, in welchen nicht alle Addenden denselben Factor haben, z. B.

$$35mn - 5m - 1 + 7n = (35mn - 5m) + (7n - 1) = 5m(7n - 1) + 1 \cdot (7n - 1) = (7n - 1)(5m + 1).$$

§ 37 [§ 29] (Heis § 15. II.).

In jedem Produkt kann Multiplikandus und Multiplikator vertauscht werden.

Beh. $a \cdot b = b \cdot a$.

Beweis. $a \cdot b$ ist nach der Erklärung in § 7 $= \overset{\overset{1}{\smile}}{a} + \overset{\overset{2}{\smile}}{a} + \overset{\overset{3}{\smile}}{a} + \cdots + \overset{\overset{b}{\smile}}{a}$. Jedes a vertritt eine Summe von a Summanden, deren jeder gleich der Einheit ist. Man schreibe diese Summe von a Summanden so hin, daß die einzelnen Summanden unter einander stehen. Dann ist

$$a \cdot b = \left\{\begin{array}{llllllll} (1) & \overset{\overset{1}{\smile}}{1} & + \overset{\overset{2}{\smile}}{1} & + \overset{\overset{3}{\smile}}{1} & + \overset{\overset{4}{\smile}}{1} & + \ldots & + \overset{\overset{b}{\smile}}{1} \\ (2) & + 1 & + 1 & + 1 & + & \ldots\ldots & + 1 \\ (3) & + 1 & + 1 & + 1 & + & \ldots\ldots & + 1 \\ & \cdot & & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ (a) & + 1 & + 1 & + 1 & + & \ldots\ldots & + 1 \end{array}\right\}$$

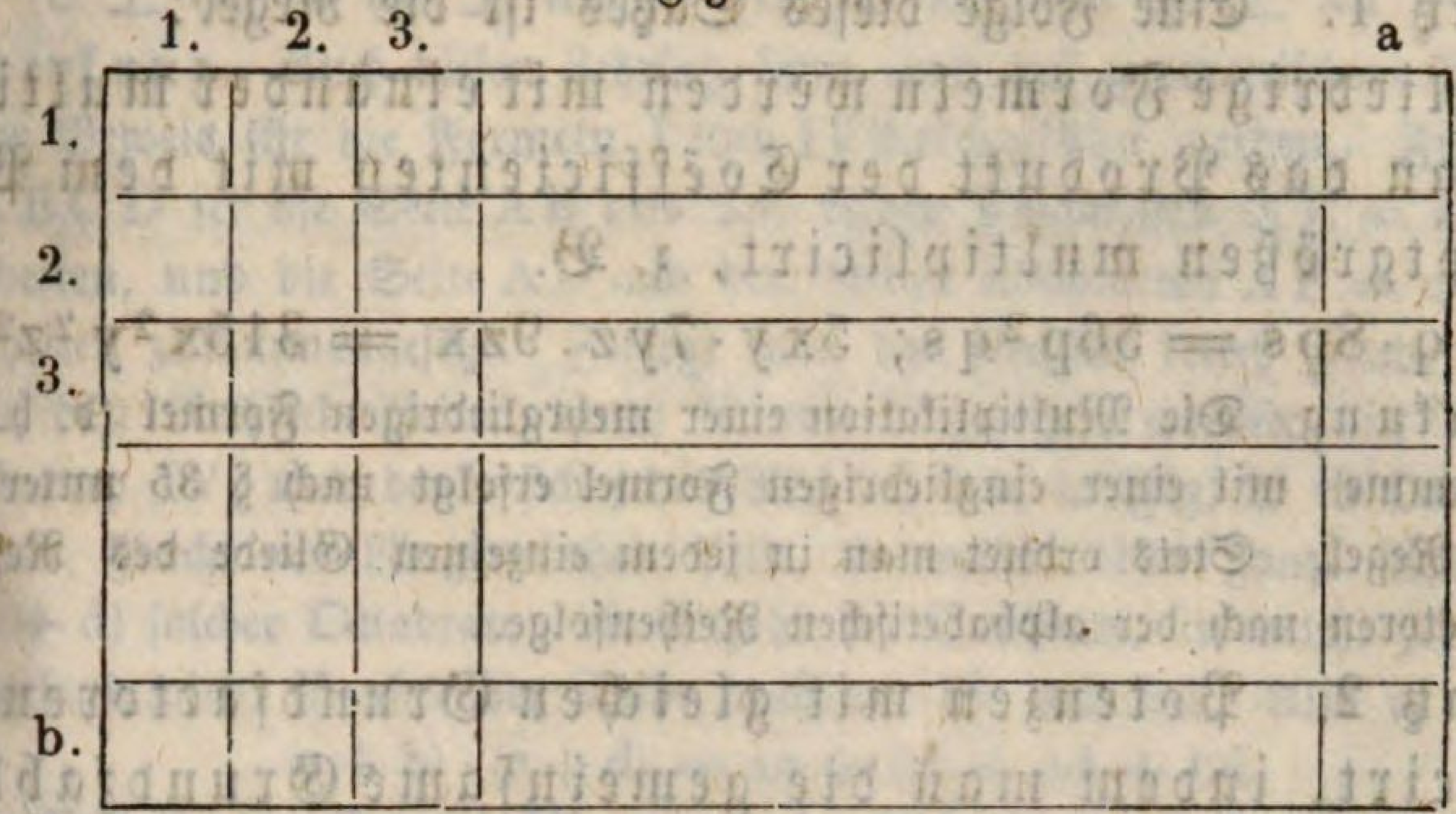
Die Summe der Glieder jeder einzelnen waagerechten Reihe ist b; und da a solcher Reihen vorhanden sind, so ist die ganze Summe gleich

$$\overset{\overset{1}{\smile}}{b} + \overset{\overset{2}{\smile}}{b} + \overset{\overset{3}{\smile}}{b} + \cdots + \overset{\overset{a}{\smile}}{b} = b \cdot a, \text{ d. h. } a \cdot b \text{ ist } = b \cdot a.$$

Anmerkung 1. Auf geometrischem Wege läßt dieser Satz sich so beweisen: Man bilde ein Rechteck (Fig. 2), in welchem ein Paar Gegenseiten je a Längeneinheiten, und das andere Paar Seiten je b Längeneinheiten lang ist. Zieht man durch die Theilpunkte Linien, welche zu den anstoßenden Seiten parallel laufen, so wird dadurch das Rechteck in Quadrate getheilt, deren Seiten je gleich der Längeneinheit sind. Die Summe der Quadrate, aus denen das ganze Rechteck besteht, wird auf zwei verschiedene Weisen berechnet. In der ersten Verticalreihe sind b Quadrate, in den zwei ersten Verticalreihen also $2b$ Quadrate u. s. f., in allen a Verticalreihen zusammen

a·b Quadrate enthalten. — In der ersten Horizontalreihe befinden sich a Quadrate, in den zwei ersten Horizontalreihen 2a Quadrate u. s. f., in allen b Horizontalreihen

Fig. 2.



demnach b·a Quadrate. Da die Summe der Quadrate, aus denen das Rechteck besteht, sich selbst gleich ist, so ist a·b = b·a.

Anmerkung 2. Man braucht deshalb zwischen Multiplikandus und Multiplikator keinen Unterschied zu machen; und aus diesem Grunde darf man beide mit dem gemeinsamen Namen **Factoren** bezeichnen. Vergl. § 7.

Anmerkung 3. Da die Reihenfolge der Factoren eines Produktes gleichgiltig ist, so stellt man die Zahlfactoren (Coëfficienten) stets vor die Buchstabenfactoren.

§ 38 [§ 29] (Heis § 15. I.).

Die Regel des Kopfrechnens

$(25\cdot 9)\cdot 4 = (25\cdot 4)\cdot 9 = 100\cdot 9$ oder $(3\cdot 5)\cdot(4\cdot 2) = (3\cdot 4)\cdot(5\cdot 2) = 12\cdot 10$

lautet in Buchstaben

$$(ab)\cdot c = (ac)\cdot b = a\cdot(bc) \text{ oder } (ab)\cdot(cd) = (abc)\cdot d$$
$$= (abd)\cdot c \text{ u. s. w.} = abcd$$

und in Worten:

Mit einem Produkt wird multiplicirt, indem man mit seinen Factoren in beliebiger Reihenfolge multiplicirt.

Beweis. $(ab)\cdot c$ ist $= \overset{1}{\underbrace{ab}} + \overset{2}{\underbrace{ab}} + \overset{3}{\underbrace{ab}} + \overset{4}{\underbrace{ab}} + \cdots\cdots + \overset{c}{\underbrace{ab}}$.

Jeder Summand ab ist aber eine Summe von b Summanden, deren jeder gleich a ist. Also ist

$$ab\cdot c = \Bigl(\underbrace{\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\overset{3}{a}+\cdots\cdots+\overset{b}{a}}_{(1)}\Bigr) + \Bigl(\underbrace{\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\overset{3}{a}+\cdots\cdots+\overset{b}{a}}_{(2)}\Bigr) + \cdots + \Bigl(\underbrace{\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\overset{3}{a}+\cdots\cdots+\overset{b}{a}}_{(c)}\Bigr)$$

oder anders geordnet

$$= \Bigl(\underbrace{\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\overset{3}{a}+\cdots\cdots+\overset{c}{a}}_{(1)}\Bigr) + \Bigl(\underbrace{\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\overset{3}{a}+\cdots\cdots+\overset{c}{a}}_{(2)}\Bigr) + \cdots + \Bigl(\underbrace{\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\cdots\cdots+\overset{c}{a}}_{(b)}\Bigr)$$

$$= \underset{(1)}{ac} + \underset{(2)}{ac} + \cdots + \underset{(b)}{ac}$$

$$= ac\cdot b.$$

Ebenso wird bewiesen, daß $bc \cdot a = ba \cdot c = ab \cdot c$, und daß $ab \cdot cd = abc \cdot d = abd \cdot c =$ u. s. w. $= abcd$ ist.

Zusatz 1. Eine Folge dieses Satzes ist die Regel:

Eingliedrige Formeln werden mit einander multiplicirt, indem man das Produkt der Coëfficienten mit dem Produkte der Hauptgrößen multiplicirt, z. B.

$$7pq \cdot 8ps = 56p^2qs;\ 5xy \cdot 7yz \cdot 9zx = 315x^2y^2z^2.$$

Anmerkung. Die Multiplikation einer mehrgliedrigen Formel (d. h. einer algebraischen Summe) mit einer eingliedrigen Formel erfolgt nach § 35 unter Benutzung vorstehender Regel. Stets ordnet man in jedem einzelnen Gliede des Resultates die Buchstabenfactoren nach der alphabetischen Reihenfolge.

Zusatz 2. Potenzen mit gleichen Grundfactoren werden multiplicirt, indem man die gemeinsame Grundzahl mit der Summe der Potenzexponenten potenzirt.

Beh. $a^5 \cdot a^3 = a^{5+3} = a^8$.

Bew. a^5 ist $= \overset{1}{a} \cdot \overset{2}{a} \cdot \overset{3}{a} \cdot \overset{4}{a} \cdot \overset{5}{a}$ und $a^3 = \overset{1}{a} \cdot \overset{2}{a} \cdot \overset{3}{a} \cdot$ Daher ist

$$a^5 \cdot a^3 = \overset{1}{a} \cdot \overset{2}{a} \cdot \overset{3}{a} \cdot \overset{4}{a} \cdot \overset{5}{a} \cdot \overset{6}{a} \cdot \overset{7}{a} \cdot \overset{8}{a} = a^8.$$

Anmerkung. Ebenso ist $6a^3b^2 \cdot 7a^4b = 42a^7b^3$.

§ 39 [§ 33] (Heis § 16).

Zwei Binome werden multiplicirt, indem man jedes Glied des einen Binom mit jedem Gliede des anderen multiplicirt; Factoren mit denselben Vorzeichen geben ein positives, Factoren mit verschiedenen Vorzeichen ein negatives Produkt.

Beh. I. $(a+b) \cdot (c+d) = ac + ad + bc + bd$.
II. $(a+b) \cdot (c-d) = ac - ad + bc - bd$.
III. $(a-b) \cdot (c+d) = ac + ad - bc - bd$.
IV. $(a-b) \cdot (c-d) = ac - ad - bc + bd$.

Beweis zu I und II. Man betrachte den Factor $(c \pm d)$ zunächst als eingliedrig; dann ist nach § 33

$$(a+b) \cdot (c \pm d) = a\,(c \pm d) + b\,(c \pm d).$$

Läßt man nun den Factor $(c \pm d)$ in seine beiden Glieder zerfallen, so ergiebt sich

$$(a+b) \cdot (c \pm d) = ac \pm ad + bc \pm bd.$$

Beweis zu III und IV. Wird der Factor $(c \pm d)$ wieder als

eingliedrig betrachtet, so ist $(a-b)\cdot(c\pm d) = a(c\pm d) - b(c\pm d)$. Sobald aber der Factor $(c\pm d)$ zerfällt, ergiebt sich
$(a-b)\cdot(c\pm d) = ac \pm ad - [bc \pm bd] = ac \pm ad - bc \mp bd.$

Anmerkung. Auch diesen Lehrsatz kann man auf geometrischem Wege beweisen. Es soll der Beweis für die Formeln I und IV durchgeführt werden. Fig. 3. In dem Rechteck ABCD sei die Seite AB aus den beiden Abschnitten $AE = a$ und $EB = b$ Längeneinheiten, und die Seite AD aus den beiden Abschnitten $AF = c$ und $FD = d$ Längeneinheiten zusammengesetzt. Zerlegt man das Rechteck durch gerade Linien, welche parallel zu den Rechteck-Seiten durch E und F gezogen werden, in die 4 Rechtecke I, II, III und IV, und denkt sich jedes Rechteck, wie in Fig. 2, in Quadrate zerlegt, deren Seiten gleich der Längeneinheit sind, so enthält das ganze Rechteck ABCD $(a+b)\cdot(c+d)$ solcher Quadrate; die Anzahl der Quadrate, in welche jedes der kleinen Rechtecke zerlegt wird, ist aber der Reihe nach ac, bc, ad, bd. Also ist

$$(a+b)\cdot(c+d) = ac + bc + ad + bd.$$

Zum Beweise der Formel IV mögen in Fig. 4 die Seiten AB und AD des Rechtecks ABCD a, bezüglich c Längeneinheiten lang sein; die Strecke EB hingegen enthalte b, und die Strecke FD enthalte d solcher Längeneinheiten; dann beträgt die Strecke AE $(a-b)$ Längeneinheiten und AF $(c-d)$ Längeneinheiten. Man zieht durch E und F wiederum Parallelen zu den Rechteckseiten und denkt sich jedes der so

Fig. 3.

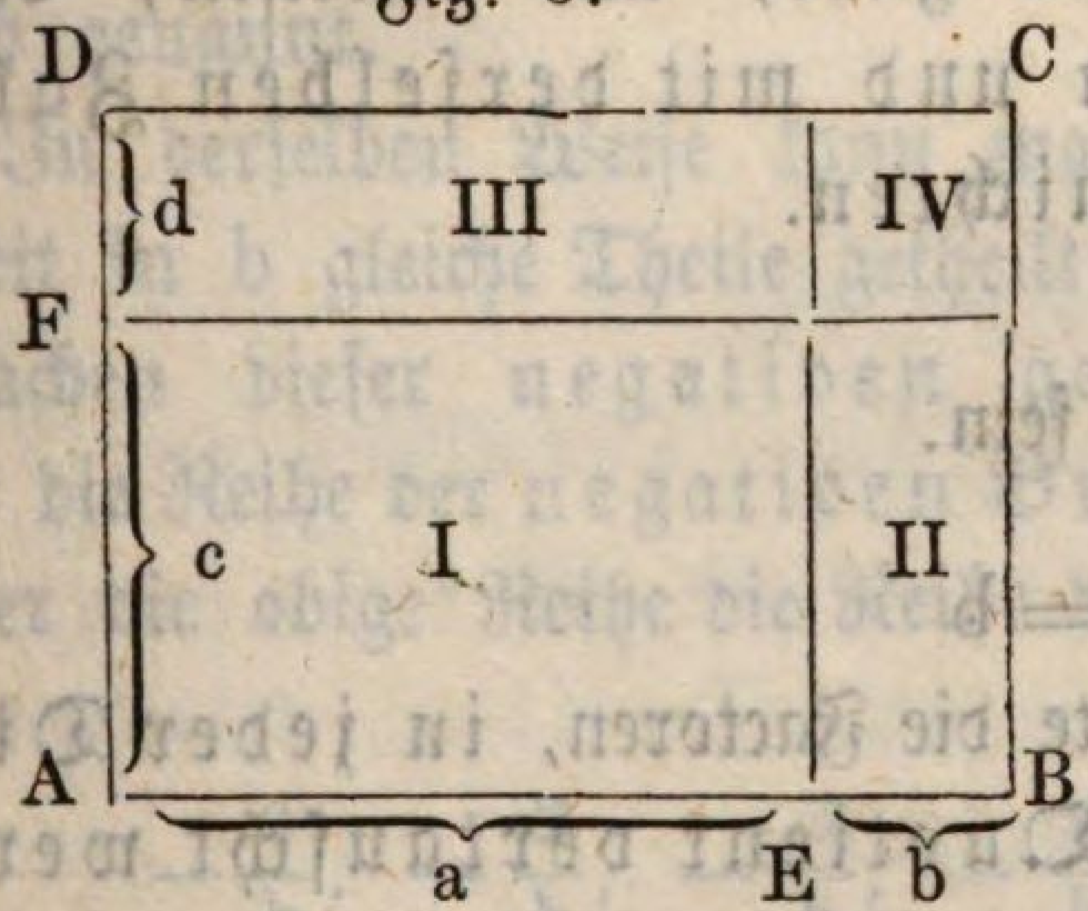
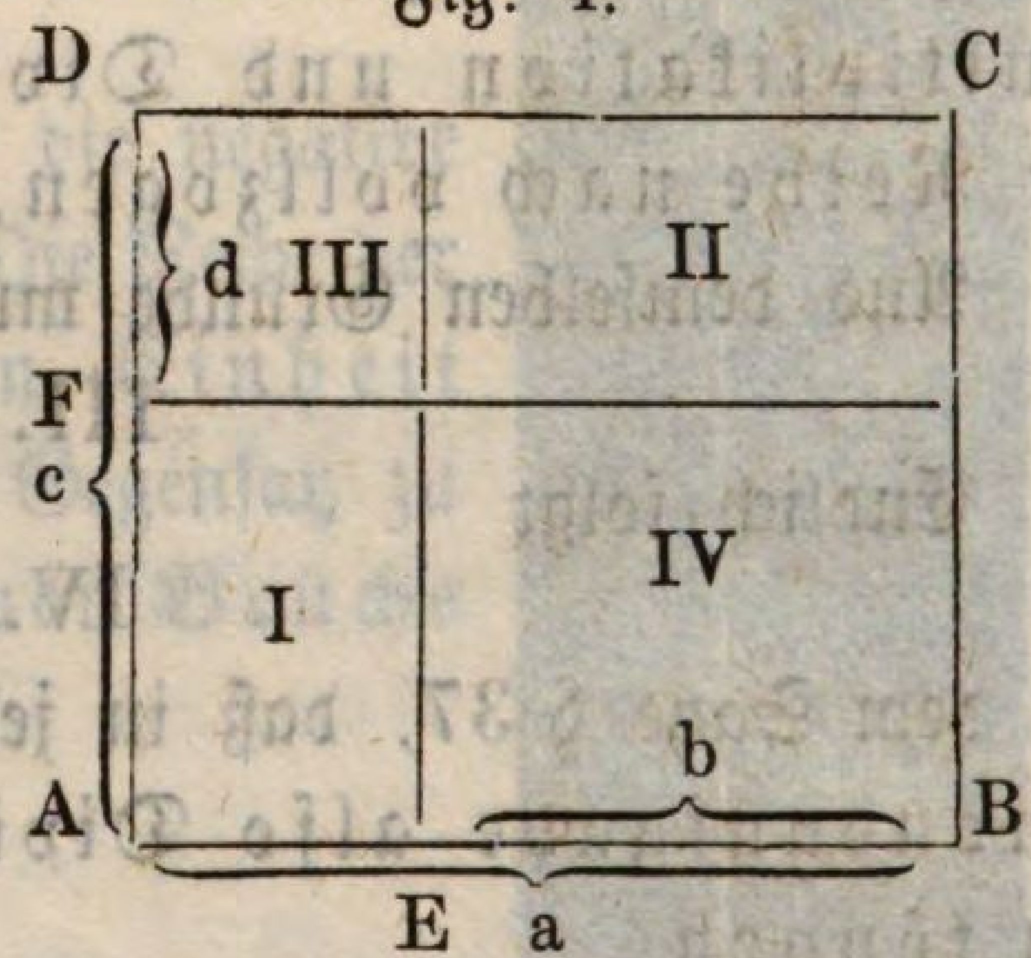


Fig. 4.



entstandenen vier kleinen Rechtecke, wie in Fig. 2, in Quadrate zerlegt, deren Seiten gleich der Längeneinheit sind; dann bestehen diese kleinen Rechtecke der Reihe nach aus

$$(a-b)\cdot(c-d),\ bd,\ (a-b)\cdot d = ad - bd,\ b\cdot(c-d) = bc - bd$$

solchen Quadraten; die Summe dieser Quadrate ist aber gleich ac, der Anzahl der Quadrate, in welche das ganze Rechteck zerlegt wird. Also ist

$$(a-b)\cdot(c-d) + bd + ad - bd + bc - bd = ac.$$

Wird beiderseits $-ad - bc + bd = -ad - bc + bd$ addirt, so ist nach § 4,5

$$(a-b)\cdot(c-d) = ac - ad - bc + bd.$$

Der Beweis der Formeln II und III ist entsprechend.

Zusatz 1. Die Ausdehnung dieser Regel auf Polynome ist einfach.

Zusatz 2. Besonders bemerkenswerthe Beispiele sind

1) $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$;
$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b)$
$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;

u. s. w.

2) $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$; $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$;
$(a^2+ab+b^2)(a-b) = a^3-b^3$; $(a^2-ab+b^2)(a+b) = a^3-b^3$;
$(a^3+a^2b+ab^2+b^3)(a-b) = a^4-b^4$; $(a^3-a^2b+ab^2-b^3)(a+b) = a^4-b^4$;
u. s. w.

§ 40 [§ 36].

Für die Multiplikation ungleicher Größen gelten folgende leicht zu beweisende Sätze:

1) Gleiches mit Größerem oder Größeres mit Gleichem multiplicirt giebt Größeres.
2) Größeres mit Größerem multiplicirt giebt Größeres.

D. Lehrsätze der Division und Erweiterung des Zahlbegriffs durch die Division.

§ 41 (Heis § 17).

Die Formeln

I. $(a:b) \times b = a$ und II. $(ab):b = a$

ergeben sich aus der Erklärung des Quotienten als der Zahl, welche mit dem Divisor multiplicirt, den Dividendus giebt, und beweisen, daß Multiplikation und Division, an und mit derselben Zahl der Reihe nach vollzogen, sich vernichten.

Aus demselben Grunde muß auch

III. $a:a = 1$ sein.

Endlich folgt

IV. $a:(a:b) = b$

aus dem Satze § 37, daß in jedem Produkte die Factoren, in jeder Divisionsaufgabe also Divisor und Quotient vertauscht werden können.

§ 42 [§ 46].

Aus denselben Gründen, wie im § 28, ergiebt sich, daß der Dividendus a nicht nothwendig ein Vielfaches des Divisors b zu sein braucht; aber jedenfalls läßt sich, wenn der Dividendus kein Vielfaches des Divisors ist, der Quotient $(a:b)$ durch keine der natürlichen Zahlen genau angeben. Man muß also die natürliche Zahlenreihe erweitern, um die Resultate aller möglichen Divisionen angeben zu können.

Zu dem Ende denkt man sich die Einheit in so viele gleiche Theile getheilt, als der Divisor b angiebt; ein solcher Theil, dargestellt durch $\frac{1}{b}$ (sprich ein b^{tel}) wird eine gebrochene Einheit (ein Stammbruch) genannt. Sieht man diese gebrochene Einheit als neue Einheit an, so erhält man folgende Reihe der Vielfachen dieser Einheit:

$$\frac{1}{b}, \frac{2}{b}, \frac{3}{b}, \frac{4}{b}, \frac{5}{b} \ldots\ldots$$

Jedes solches Vielfache heißt ein **Bruch**; die Anzahl der gebrochenen Einheiten wird **Zähler**, die Anzahl der gleichen Theile, in welche die natürliche Einheit getheilt gedacht wurde, **Nenner** des Bruches genannt. Im Gegensatz zu den Brüchen heißen die natürlichen Zahlen **ganze Zahlen**. (Was ist eine **gemischte Zahl**?)

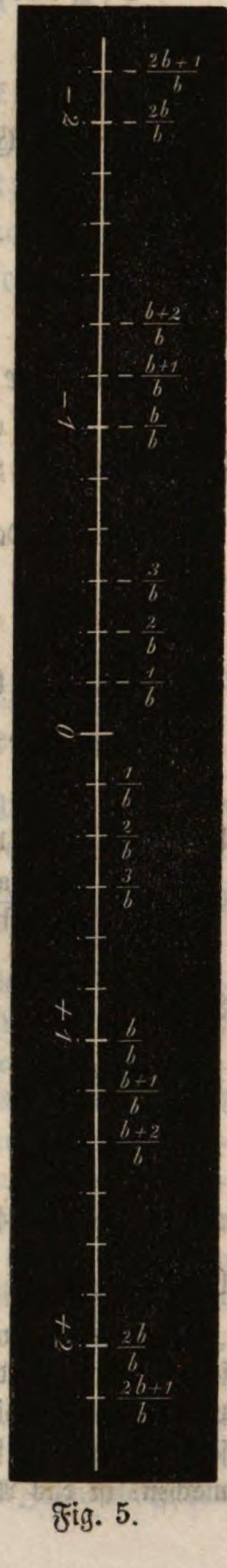


Fig. 5.

Aus dieser Erklärung folgt, daß eine Summe von b solcher gebrochenen Einheiten, deren jede gleich $\frac{1}{b}$ ist, gleich der Einheit selbst, d. h. daß $\frac{1}{b} \cdot b = 1$ ist; daß aber eine Summe von weniger oder mehr als b solcher Einheiten kleiner oder größer als die Einheit, d. h. daß der Bruch $\frac{a}{b} < 1$ oder > 1 ist, je nachdem der Zähler a kleiner oder größer als der Nenner b ist. Im ersten Falle wird der Bruch $\frac{a}{b}$ ein **echter**, im andern Falle ein **unechter** Bruch genannt.

In derselben Weise kann man sich auch die negative Einheit in b gleiche Theile getheilt denken. Die Reihe der Vielfachen dieser **negativen gebrochenen Einheit** bildet die Reihe der **negativen Brüche**, im Gegensatz zu welcher die obige Reihe die Reihe der **positiven Brüche** heißt:

$$-\frac{1}{b}, -\frac{2}{b}, -\frac{3}{b}, -\frac{4}{b}, -\frac{5}{b} \ldots\ldots$$

Jeder negative echte Bruch ist > -1, jeder negative unechte Bruch < -1.

Man erhält ein geometrisches Bild der positiven und negativen Brüche, wenn man in Fig. 1. (§ 30) auf der horizontalen geraden Linie zwischen den Endpunkten der Strecken, welche die positiven und negativen ganzen Zahlen darstellen, andere Punkte fixirt, welche um die Größe der Brüche vom Nullpunkte abstehen.

Anmerkung. Die ganzen Zahlen sind als specielle Fälle der Brüche anzusehen, denn man kann sie als Brüche mit dem Nenner 1 betrachten:

$$\ldots\ldots -4, -3, -2, -1, \text{ und } +1, +2, +3, +4, \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots -\frac{4}{1}, -\frac{3}{1}, -\frac{2}{1}, -\frac{1}{1}, \text{ und } +\frac{1}{1}, +\frac{2}{1}, +\frac{3}{1}, +\frac{4}{1}, \ldots\ldots$$

§ 43 [§ 46] (Heis § 20).

Jeder Quotient ist gleich einem Bruch, dessen Zähler gleich dem Dividendus, und dessen Nenner gleich dem Divisor ist.

Beh. $(a:b) = \frac{a}{b}$.

Beweis. Nach der Erklärung im § 42 ist

$$\frac{1}{b} \cdot b = \frac{\overset{1}{\smile}\!\!1}{b} + \frac{\overset{2}{\smile}\!\!1}{b} + \frac{\overset{3}{\smile}\!\!1}{b} + \cdots\cdots + \frac{\overset{b}{\smile}\!\!1}{b} = 1.$$

Gleiches mit Gleichem multiplicirt, giebt Gleiches; also ist

$$\frac{\overset{1}{\smile}\!\!1}{b} \cdot a + \frac{\overset{2}{\smile}\!\!1}{b} \cdot a + \frac{\overset{3}{\smile}\!\!1}{b} \cdot a + \frac{\overset{3}{\smile}\!\!1}{b} \cdot a + \cdots\cdots + \frac{\overset{b}{\smile}\!\!1}{b} \cdot a = a \text{ oder}$$

$$\left(\frac{1}{b} \cdot a\right) \cdot b = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot b = a.$$

Das Produkt aus einem Bruche und seinem Nenner ist also gleich seinem Zähler. Ebenso ist aber nach § 41. I das Produkt aus dem Quotienten $(a:b)$ und seinem Divisor b gleich dem Dividendus a. Daher ist $(a:b) = \frac{a}{b}$.

§ 44 [§ 47] (Heis § 18).

Erweitern und Heben der Brüche (Quotienten).

Ein Bruch (Quotient) bleibt ungeändert, wenn man Zähler und Nenner (Dividendus und Divisor) mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt.

Beh. I. $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$; $(a:b) = (ac):(bc)$; II. $\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}$, $(a:b) = (a:n):(b:n)$

Beweis I. Da nach § 38 $(a:b) \cdot bc$ gleich $[(a:b) \cdot b] \cdot c$, und nach § 41. I. $(a:b) \cdot b = a$ ist, so ist zufolge der Erklärung der Division $(a:b) = (ac):(bc)$. — Ebenso wird bewiesen, daß $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ ist.

Beweis II. Nach I. ist $\frac{a:n}{b:n} = \frac{(a:n) \cdot n}{(b:n) \cdot n}$. Der letztere Bruch ist aber zufolge § 41. I. $= \frac{a}{b}$. Also ist auch $\frac{a:n}{b:n} = \frac{a}{b}$. — Ebenso wird bewiesen, daß $(a:b) = (a:n):(b:n)$ ist.

Anmerkung. Einen Bruch (Quotienten) erweitern oder heben heißt seinen Zähler und seinen Nenner (Dividendus und Divisor) mit derselben Zahl multipliciren oder dividiren. Gehoben darf ein Bruch nur dann werden, wenn sein Zähler und sein Nenner eingliedrig sind. Ein Mittel, beide eingliedrig zu machen, ist das Absondern von Factoren.

§ 45 [§ 37] (Heis § 19).

Die Regeln des Kopfrechnens

$$525:5 = (500+25):5 = (500:5) + (25:5),$$
$$291:3 = (300-9):3 = (300:3) - (9:3)$$

lauten in Buchstaben:

$$(a \pm b):m = (a:m) \pm (b:m) \text{ oder } \frac{a \pm b}{m} = \frac{a}{m} \pm \frac{b}{m}$$

und enthalten den Satz:

Eine Summe oder Differenz wird durch eine einfache Zahl dividirt, indem man ihre einzelnen Glieder dividirt und die entstandenen Quotienten addirt oder subtrahirt.

Beweis. Soll $(a:m) \pm (b:m)$ der richtige Quotient sein, so muß sie, mit dem Divisor m der Aufgabe multiplicirt, den Dividendus derselben zum Produkt geben. Nun ist nach § 33

$$\{(a:m) \pm (b:m)\} \cdot m = (a:m) \cdot m \pm (b:m) \cdot m = a \pm b,$$

also ist der Quotient richtig.

Zusatz. Die Ausdehnung auf eine mehrgliedrige algebraische Summe ist einfach.

§ 46 [§ 47] (Heis § 19).

Die Umkehrung der Formeln des § 45 liefert die neue Formel: $\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = \frac{a \pm b}{m}$ und den Satz: Brüche mit gleichen Nennern, d. h. gleichnamige Brüche (Quotienten mit gleichen Divisoren) werden addirt oder subtrahirt, indem man die Summe oder Differenz ihrer Zähler (Dividenden) durch den gemeinsamen Nenner (Divisor) dividirt.

Anmerkung. Um ungleichnamige Brüche (Quotienten mit ungleichen Divisoren) addiren oder subtrahiren zu können, muß man sie zuvor gleichnamig machen und zu dem Zwecke das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller Nenner (Divisoren) suchen, welches der Generalnenner genannt wird; alle Nenner sind hierbei, selbst wenn sie mehrgliedrig sind, als eingliedrig zu betrachten. Der Generalnenner ist alsdann gleich dem Produkte aller Nenner, wenn sie keine gemeinschaftlichen Factoren besitzen; wenn aber mehrere Nenner Potenzen desselben Factors enthalten, so ist der Generalnenner gleich dem Produkte aus den verschiedenen Factoren aller Nenner und der höchsten Potenz des gemeinschaftlichen Factors, welche in den einzelnen Nennern anzutreffen ist. Man dividirt nun den Generalnenner durch jeden einzelnen Nenner, erweitert mit dem so erhaltenen Quotienten den zugehörigen Bruch und vereinigt die neuen Zähler der so gleichnamig gemachten Brüche. Dabei ist jedoch jeder mehrgliedrige Zähler als eingliedrig aufzufassen, d. h. vorläufig eingeklammert in die algebraische Summe der Zähler aufzunehmen; durch Auflösen der Klammern und Zusammenziehen

der gleichnamigen Glieder wird die algebraische Summe der Zähler vereinfacht, und endlich der entstehende Bruch, wenn möglich, nach der Regel in § 44, gehoben, z. B.

Aufgabe. $\frac{a^2+b^2}{ab} - \frac{b^2}{a^2+ab}$. General-Nenner $ab \cdot (a+b)$;

erweitert: $\frac{(a^2+b^2)(a+b)}{ab \cdot (a+b)} - \frac{b^2 \cdot b}{(a^2+ab) \cdot b} = \frac{(a^3+a^2b+ab^2+b^3) - b^3}{ab(a+b)}$

$$= \frac{a(a^2+ab+b^2)}{ab(a+b)} = \frac{a^2+ab+b^2}{b(a+b)}.$$

§ 47 [§ 39] (Heis § 21. I.).

Die Regel des Kopfrechnens

$$8100:9 = (81:9) \cdot 100, \quad 900:25 = 9 \cdot (100:25)$$

lautet in Buchstaben:

$$ab:m = (a:m) \cdot b = a \cdot (b:m)$$

und enthält den Satz:

Ein Produkt wird durch eine Zahl dividirt, indem man einen Factor dividirt und den erhaltenen Quotienten mit dem andern Factor multiplicirt.

Beweis wie § 45.

Zusatz. Demnach ist also $28a:7 = (28:7) \cdot a = 4a$, d. h. in Worten? (vergl. § 38, Zusatz 1.).

§ 48 [§ 40] (Heis § 21. I.).

Die Umkehrung des Vorstehenden giebt die Formel

$$(a:m) \cdot b = ab:m \text{ oder } \frac{a}{m} \cdot b = \frac{ab}{m};$$

und in dieser Formel liegt der Satz:

Ein Bruch (Quotient) wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man seinen Zähler (Dividendus) multiplicirt.

Zusatz. Die beiden Formeln $ab:m = (a:m) \cdot b$ und umgekehrt enthalten die Regel, daß Multiplikation und Division, an derselben Zahl der Reihe nach zu vollziehen, sich in der Reihenfolge vertauschen lassen.

§ 49 [§ 42] (Heis § 22).

Das Verfahren des Kopfrechnens

$$(600:25):4 = 600:25 \cdot 4 = 600:100$$

liefert die Formel

$$(a:b):c = a:(bc) \text{ oder } \frac{a}{b}:c = \frac{a}{bc} = \frac{a:c}{b}$$

und enthält den Lehrsatz:

Ein Bruch (Quotient) wird durch eine Zahl dividirt, indem man seinen Nenner (Divisor) mit der Zahl multipli-

cirt oder seinen Zähler (Dividendus) durch die Zahl dividirt oder:

Wiederholte Division ist Division mit dem Produkte der Divisoren.

Beweis. Da $\left(\frac{a}{b}:c\right)\cdot c=\frac{a}{b}$ ist, so muß auch jeder der beiden anderen Brüche, mit c multiplicirt, das Resultat $\frac{a}{b}$ geben. Es ist aber nach § 48 und § 44

$\frac{a}{bc}\cdot c=\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$, und nach § 48 und § 41. I. $\frac{a:c}{b}\cdot c=\frac{(a:c)\cdot c}{b}=\frac{a}{b}$.

Also ist obige Formel richtig.

§ 50 [§ 41] (Heis § 22).

Die Umkehrung

$$a:bc=(a:b):c=(a:c):b$$

enthält den Satz:

Durch ein Produkt wird dividirt, indem man mit den Factoren der Reihe nach dividirt.

Zusatz 1. Die Ausdehnung auf mehr als zwei Factoren ist einfach.

Zusatz 2. Potenzen mit gleichen Grundfactoren werden, wenn der Potenzexponent des Divisors kleiner als der des Dividendus ist, durch einander dividirt, indem man den Potenzexponenten des Divisors von dem des Dividendus subtrahirt und mit der erhaltenen Differenz die gemeinsame Grundzahl potenzirt.

Beh. $a^7:a^3=a^{7-3}=a^4$.

Beweis. Da nach § 38 Zusatz 2 $a^4\cdot a^3=a^7$ ist, so ist a^4 der richtige Quotient von a^7 und a^3.

§ 51 [§ 40] (Heis § 23. I.).

Die Umkehrung der Formel im § 47 liefert auch noch die Formel

$$a\cdot(b:m)=ab:m \text{ oder } a\cdot\frac{b}{m}=\frac{ab}{m}.$$

Durch Vergleichung dieser Formel mit der aus § 48 folgenden Formel

$$(b:m)\cdot a=ba:m=ab:m \text{ oder } \frac{b}{m}\cdot a=\frac{ba}{m}=\frac{ab}{m}$$

ergiebt sich, daß in jedem Produkte auch dann Multiplikandus und Multiplikator vertauscht werden können, wenn ersterer eine gebrochene Zahl ist. Man darf deshalb auch eine gebrochene Zahl als Multiplikator wählen. Und die Bezeichnung: Mit einem Bruche

(Quotienten) multipliciren ist zufolge obiger Formel gleichbedeutend mit: Multipliciren mit dem Zähler (Dividendus) und Dividiren durch den Nenner (Divisor).

§ 52 (Heis § 23. II.).

Nach den Regeln des Zifferrechnens ist

$\frac{5}{8} \cdot \frac{7}{9} = \frac{5 \cdot 7}{8 \cdot 9} = \frac{35}{72}$. Ebenso ist $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, d. h.

Brüche werden multiplicirt, indem man das Produkt der Zähler durch das Produkt der Nenner dividirt.

Beweis. Die Multiplikation mit dem Bruch $\frac{c}{d}$ erfordert zufolge § 51, daß mit dem Zähler c multiplicirt und durch den Nenner d dividirt wird. Also ist $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b} \cdot c\right) : d$. Nach § 48 ist aber $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$ und nach § 49 ist $\frac{ac}{b} : d = \frac{ac}{bd}$. Also ist $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

§ 53 [§ 43] (Heis § 24).

Durch einen Bruch wird dividirt, indem man durch seinen Zähler dividirt und mit seinem Nenner multiplicirt, oder indem man mit dem umgekehrten Bruche (d. h. dem durch Vertauschung des Zählers und Nenners entstandenen Bruche) multiplicirt.

Beh. $a : \frac{b}{c} = (a : b) \cdot c = \frac{ac}{b} = a \cdot \frac{c}{b}$; $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d} = \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

Beweis. Wird jedes der drei Resultate $(a : b) \cdot c$, $\frac{ac}{b}$, $a \cdot \frac{c}{b}$ mit dem Divisor $\frac{b}{c}$ multiplicirt, so erhält man den Dividendus. — Ebenso im zweiten Falle.

Anmerkung 1. Den zweiten Theil der Behauptung pflegt man so auszudrücken: Brüche werden dividirt, indem man den Dividendus mit dem umgekehrten Divisor multiplicirt.

Anmerkung 2. Wenn das Produkt zweier Zahlen gleich 1 ist, so heißt die eine die Reciproke (der umgekehrte Werth) der anderen. Man findet die Reciproke einer gegebenen Zahl, wenn man 1 durch diese Zahl dividirt, z. B.

$$3 \text{ und } \frac{1}{3}, \quad \frac{4}{5} \text{ und } \frac{5}{4}, \quad a \text{ und } \frac{1}{a}, \quad \frac{a}{b} \text{ und } \frac{b}{a}$$

sind Reciproke von einander.

§ 54 [§ 45, 56] (Heis § 25).

Division der algebraischen Zahlen und Formeln.

I. Der Quotient zweier algebraischen Zahlen mit gleichen Vorzeichen ist positiv, mit ungleichen Vorzeichen negativ.

Behauptung.

1) $(+a):(+b) = +(a:b)$
2) $(-a):(-b) = +(a:b)$
3) $(-a):(+b) = -(a:b)$
4) $(+a):(-b) = -(a:b)$.

Beweis. Mit Hülfe der Erklärung der Division und § 39.

Anmerkung. Combinirt man mit diesen Formeln die Resultate im § 45, so erhält man die Regel für die Division algebraischer Summen durch eine einfache algebraische Zahl.

II. Zwei Zahlen durch einander dividiren heißt zusehen, wie oft der Divisor sich successive vom Dividendus subtrahiren läßt. Deshalb wird bei der Division zweier mehrziffrigen Zahlen stets die durch die ersten Ziffern des Dividendus gebildete Zahl durch die höchste Ziffer des Divisors dividirt, der Quotient mit dem ganzen Divisor multiplicirt, das Produkt vom Dividendus subtrahirt, und der Rest als neuer Dividendus angesehen. Genau ebenso werden zwei Polynome durch einander dividirt. Zuvor jedoch müssen beide nach demselben Gesetze, d. h. beide nach steigenden oder fallenden Potenzen derselben Hauptgröße geordnet werden; dann wird das erste Glied des Dividendus durch das erste Glied des Divisors dividirt, der Quotient mit dem ganzen Divisor multiplicirt, und das Produkt von dem Dividendus subtrahirt; der Rest wird, nach dem ursprünglichen Gesetz geordnet, stets von Neuem Dividendus für den unveränderten Divisor, und die Rechnung wird so lange fortgesetzt, bis der Rest 0 bleibt, oder, sobald dieses nicht eintritt, so weit, bis von allen Gliedern des Dividendus gleichnamige, durch Multiplikation des Divisors mit den einzelnen Gliedern des Quotienten erzeugte Glieder subtrahirt worden sind.

Beispiel. $(12x^2 - 51xy - 24xz + 54y^2 + 48yz):(4x - 9y - 8z) = 3x - 6y.$

$$\begin{array}{llll}
12x^2 - 27xy - 24xz & & & \\
\hline
 & -24xy & & +54y^2 + 48yz \\
 & -24xy & & +54y^2 + 48yz \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}$$

Anmerkung. Ueber solche Polynomien, deren Glieder auch im Nenner Potenzen enthalten, die sogenannten Bruchpolynomien, siehe § 67.

§ 55 [§ 44].

Für die Division ungleicher Größen gelten folgende Sätze:

1) Größeres durch Gleiches dividirt giebt Größeres, weil Gleiches mit Größerem multiplicirt werden muß, um Größeres zu erhalten.

2) Gleiches durch Größeres dividirt giebt Kleineres, weil Größeres nur mit Kleinerem multiplicirt Gleiches geben kann.

E. Von der Null.

§ 56 [§ 26, 34, 45] (Heis § 26).

1. Schon im § 29 ist die Null als das Resultat der Subtraction erklärt worden, wenn Minuendus und Subtrahendus einander gleich sind; und daraus wurde gefolgert, daß jede Zahl ungeändert bleibt, wenn 0 zu ihr addirt oder von ihr subtrahirt wird.

2. Wenn ferner der Multiplikandus eines Produktes gleich 0 ist, so muß das ganze Produkt 0 sein, da die Summe beliebig vieler Nullen wieder gleich 0 ist. Ein Produkt aber, in welchem der Multiplikator gleich 0 ist, hat nach der Erklärung der Multiplikation keinen Sinn. Man kann aber auch solche Produkte mit in Betracht ziehen, wenn man dafür den Satz über die Vertauschung der Factoren eines Produktes (§ 37) gelten läßt. Und dann ist das Produkt

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung definirt man auch die Produkte $0 \cdot 0$, $0 \cdot (-a)$ und $(-a) \cdot 0$, welche an und für sich ebenfalls keinen Sinn haben.

Da man endlich in einem aus einer Null und mehreren anderen Zahlen bestehenden Produkte alle von 0 verschiedenen Factoren vereinigen und dann die so erhaltene Zahl mit dem Factor 0 multipliciren kann, so ist jedes Produkt, in welchem ein Factor gleich der Null ist, gleich Null. Umgekehrt aber kann ein Produkt auch nur dann gleich 0 sein, wenn einer seiner Factoren gleich Null ist.

3. Ein Quotient, dessen Dividendus 0 und dessen Divisor von 0 verschieden ist, hat den Werth 0.

Denn: Ist $0 : a = b$, so muß $a \cdot b = 0$ sein; da aber a von Null verschieden ist, so muß $b = 0$ sein.

4. Ein Quotient, dessen Dividendus von Null verschieden und dessen Divisor gleich Null ist, hat einen unendlich großen Werth.

Denn da Gleiches durch Kleineres dividirt Größeres giebt, so wird ein Quotient um so größer, je kleiner sein Divisor wird; also muß ein Quotient mit dem Divisor 0 größer sein als jede denkbare positive Zahl. Man sagt deshalb, er ist unendlich groß, und hat dafür das Zeichen ∞. In der Rechnung sind solche Quotienten zu vermeiden.

5. Ein Quotient, dessen Dividendus und Divisor gleich Null ist, hat einen unbestimmten Werth.

Denn es gelten für jeden Werth von x folgende Gleichungen (§ 39):

$$x - 1 = x - 1$$
$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$
$$x^3 - 1 = (x^2 + x + 1)(x - 1)$$

u. s. w.

Durch beiderseitige Division mit $x - 1$ erhält man der Reihe nach $\frac{x-1}{x-1} = 1$, $\frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$, $\frac{x^3-1}{x-1} = x^2 + x + 1$ u. s. w. Die links vom Gleichheitszeichen stehenden Quotienten erhalten für $x = 1$ die Form $\frac{0}{0}$; die rechts stehenden Summen ergeben aber der Reihe nach 1, 2, 3.... Der Ausdruck $\frac{0}{0}$ hat also keinen bestimmten Zahlenwerth.

III. Kapitel.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

§ 57 [§ 48] (Heis § 31).

Insofern die Differenz $(a - b)$ die Frage beantwortet, um wie viel a größer ist als b, und der Quotient $(a : b)$ die andere, wie viel mal a größer ist als b, insofern also beide Formen über das Größenverhältniß von a und b Aufschluß geben, führen sie auch den gemeinschaftlichen Namen: Verhältniß, und zwar heißt $a - b$ ein arithmetisches Verhältniß, $a : b$ ein geometrisches. Das Rechenzeichen wird jetzt „zu" gelesen; a heißt Vorderglied, b Hinterglied. Zwei Zahlen stehen demnach in einem Verhältniß zu einander, wenn man die eine (das Vorderglied) aus der anderen (dem Hintergliede) durch Addition oder durch Multiplikation entstehen läßt. Der ausgerechnete Werth des Verhältnisses, d. h. die Zahl, um welche das Hinterglied vermehrt oder mit welcher es multiplicirt werden muß, um das Vorderglied zu erzeugen, heißt sein Exponent, ist also für a zu b im ersten Falle $(a - b)$ oder $-(b - a)$, im 2. Falle $(a : b)$ oder $\frac{a}{b}$. Steigen-

des, fallendes Verhältniß. Werth des Exponenten in beiden Arten von Verhältnissen. Sind die Glieder eines Verhältnisses benannt, so müssen sie gleiche Benennung haben.

Zwei Verhältnisse, deren Exponenten gleich sind, sind einander gleich.

Was heißt ein Verhältniß umkehren?

Anmerkung. Da nur die geometrischen Verhältnisse Anwendung finden, so ist im Folgenden nur von ihnen die Rede.

§ 58 [§ 49]. Lehrsatz.

Ein geometrisches Verhältniß bleibt ungeändert, wenn man beide Glieder mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt.

Grund. Der Exponent bleibt dabei nach Früherem ungeändert.

Zusatz. Ein Verhältniß gleichnamiger Brüche ist nach dem Lehrsatz identisch mit dem der Zähler. Sind die Glieder ungleichnamige Brüche, so macht man sie zuerst gleichnamig; sind sie gemischte Zahlen, so verwandelt man sie in unechte Brüche und kann so schließlich jedes Verhältniß als ein Verhältniß ganzer Zahlen darstellen, welches sich nicht mehr heben läßt.

§ 59 [§ 50]. Erklärung.

Verbindet man 2 gleiche Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen, so erhält man eine Proportion, also

$$a:b = c:d.$$

Das Gleichheitszeichen wird „wie" gelesen. Aeußere und innere Glieder. Zusammengehörende Glieder. Gleichnamige (Vorder- oder Hinter-) Glieder.

Sind in einer Proportion die beiden inneren (oder äußeren) Glieder einander gleich, so heißt die Proportion stetig: $a:b = b:c$. In ihr heißt das mittlere Glied die mittlere Proportionalzahl oder das geometrische Mittel zwischen den beiden anderen Gliedern.

Sind die Glieder einer Proportion benannte Zahlen, so müssen die Glieder jedes Verhältnisses von derselben Art, d. h. gleichbenannt sein.

§ 60 [§ 51] (Heis § 32, 33[a]).

Eigenschaften der Proportionen.

Lehrsatz I. In jeder Proportion ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem der inneren. Aus jeder Proportion läßt sich eine Gleichung bilden.

Vor. Gegeben ist die Proportion $a:b = c:d$.

Beh. Es ist $ad = bc$.

Beweis. Nach der Erklärung der Proportion folgt aus der Voraussetzung, daß $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ist. Durch Multiplikation beider Brüche mit ihrem Generalnenner bd ergiebt sich $ad = bc$.

Anmerkung 1. Vorstehender Satz gilt natürlich nur dann, wenn nicht beide Verhältnisse benannte Zahlen zu Gliedern haben.

Anmerkung 2. In der arithmetischen Proportion $a - b = c - d$ ist $a + d = b + c$, also in der stetigen $\frac{a+c}{2} = b$. Arithmetisches Mittel.

Zusatz. $a = \frac{bc}{d}$, $d = \frac{bc}{a}$ u. s. w. geben die Regel, nach der das fehlende 4. Glied einer Proportion berechnet wird, finden deshalb in der Regel de tri im praktischen Rechnen Anwendung.

Lehrsatz II. Aus 2 gleichen zweitheiligen Produkten lassen sich 8 Proportionen bilden, indem man die Factoren des einen Produktes zu äußeren, die des anderen zu inneren Gliedern macht.

Vor. Gegeben ist $ad = bc$.

Beh. Es lassen sich folgende 8 Proportionen bilden:

1. $a:b = c:d$	5. $c:d = a:b$
2. $a:c = b:d$	6. $b:d = a:c$
3. $d:c = b:a$	7. $b:a = d:c$
4. $d:b = c:a$	8. $c:a = d:b$.

Beweis. Aus $ad = bc$ folgt durch Division

1) $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$, d. h. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, also $a:b = c:d$;

2) $\frac{ad}{cd} = \frac{bc}{cd}$, d. h. $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, also $a:c = b:d$;

3) $\frac{ad}{ac} = \frac{bc}{ac}$, d. h. $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$, also $d:c = b:a$;

4) $\frac{ad}{ab} = \frac{bc}{ab}$, d. h. $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$, also $d:b = c:a$;

und hieraus durch Vertauschen der Verhältnisse

5) $c:d = a:b$;

6) $b:d = a:c$;

7) $b:a = d:c$;

8) $c:a = d:b$.

Lehrsatz III. Aus jeder Proportion lassen sich noch 7

andere Proportionen herleiten, indem man die inneren oder die äußeren Glieder mit einander vertauscht oder die Verhältnisse umstellt oder sie umkehrt.

Beweis. Aus der gegebenen Proportion $a:b = c:d$ folgt die Produkten-Gleichung $ad = bc$ und aus dieser ergeben sich noch 7 andere Proportionen.

Lehrsatz IV. In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz des ersten und zweiten Gliedes zur Summe oder Differenz des dritten und vierten Gliedes wie das erste Glied zum dritten oder wie das zweite Glied zum vierten.

Beweis. Aus der gegebenen Proportion $a:b = c:d$ folgt die Produktengleichung $ad = bc$. Addirt oder subtrahirt man hiervon die gleichen Produkte $bd = bd$, so erhält man

$$ad \pm bd = bc \pm bd \text{ oder}$$
$$(a \pm b)\, d = (c \pm d)\, b.$$

Unter Anwendung des Lehrsatzes II folgt hieraus

$$a \pm b : c \pm d = b : d.$$ Weil ferner sich verhält $$a : c = b : d,$$ so verhält sich auch

$$a \pm b : c \pm d = a : c \text{ oder } = b : d.$$

Anmerkung. Sind beide Verhältnisse steigend, so heißt die neue Form

$$b - a : d - c = a : c \text{ oder } b : d.$$

Der Beweis hierfür wird geführt, indem man $ad = bc$ von $bd = bd$ subtrahirt.

Zusatz. In jeder Proportion verhält sich die Summe des ersten und zweiten Gliedes zu ihrer Differenz wie die Summe des dritten und vierten Gliedes zu ihrer Differenz.

Weil sich verhält $a + b : c + d = a : c$

und $a - b : c - d = a : c$, so verhält sich auch

$$a + b : c + d = a - b : c - d$$

oder $$a + b : a - b = c + d : c - d;$$

und ebenso sind die Umstellungen richtig.

Lehrsatz V. In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Beweis. Aus $a:b = c:d$ folgt $a:c = b:d$ und daraus nach IV

$$a \pm c : b \pm d = a : b \text{ oder } = c : d.$$

Zusatz. Es verhält sich auch $a + c : a - c = b + d : b - d$, d. h. in Worten?

VI. Wenn mehrere Verhältnisse einander gleich sind, so hat man eine sogenannte laufende Proportion:

$$a : b = c : d = e : f = g : h \text{ u. s. w.}$$

Lehrsatz. In jeder laufenden Proportion verhält sich die algebraische Summe aller Vorderglieder zu der entsprechend gebildeten Summe aller Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Beweis. Aus $a : b = c : d$ folgt

$a + c : b + d = c : d$; und da

$c : d = e : f$ ist, so verhält sich

$a + c : b + d = e : f$, also auch

$a + c + e : b + d + f = e : f$ oder

$= g : h$; und deshalb auch

$$a + c + e + g : b + d + f + h = g : h = e : f = c : d = a : b;$$

und da hierbei auch einzelne Additionen durch Subtractionen vertreten sein können, so ist der obige Satz bewiesen.

Lehrsatz. VII. Aus zwei oder mehreren Proportionen kann man eine neue Proportion gewinnen, indem man die gleichstelligen Glieder multiplicirt. Dies Verfahren nennt man: die Proportionen zusammensetzen.

Beweis. Ist gleichzeitig $a : b = c : d$ und

$e : f = g : h$, so ist

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und $\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$, und deshalb

$\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \cdot \frac{g}{h}$, d. h. $\frac{ae}{bf} = \frac{cg}{dh}$ oder:

$$ae : bf = cg : dh.$$

Zusatz 1. Gleich hohe Potenzen sämmtlicher Glieder einer richtigen Proportion bilden eine neue richtige Proportion.

Beweis.

$$a : b = c : d$$
$$a : b = c : d$$

$a^2 : b^2 = c^2 : d^2$ u. s. w.

Ebenso $a^n : b^n = c^n : d^n$.

Zusatz 2.

$$a : b = c : d$$
$$b : e = d : f.$$

$ab : be = cd \cdot df$ oder

$$a : e = c : f.$$

IV. Kapitel.

A. Lehrsätze des Potenzirens. (Heis § 34—39).

§ 61 [§ 52].

1) Potenzen können nur dann addirt oder subtrahirt werden, wenn sie gleiche Grundzahlen **und** gleiche Potenzexponenten haben.

Beweis folgt aus § 13 und § 23.

2) Potenzen mit gleichen Dignanden (Grundzahlen) werden multiplicirt, indem man die einzelnen Exponenten addirt und den gemeinschaftlichen Dignanden mit der erhaltenen Summe potenzirt.

Behaupt. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Beweis. Nach der Erklärung im § 9 ist $a^m = \overset{(1)}{a} \cdot \overset{(2)}{a} \cdot \overset{(3)}{a} \cdot \overset{(4)}{a} \cdots\cdots \overset{(m)}{a}$, und $a^n = \overset{(1)}{a} \cdot \overset{(2)}{a} \cdot \overset{(3)}{a} \cdot \overset{(4)}{a} \cdots\cdots \overset{(n)}{a}$. Deshalb ist

$$a^m \cdot a^n = \overset{(1)}{a} \cdot \overset{(2)}{a} \cdot \overset{(3)}{a} \cdots\cdots \overset{(m)}{a} \cdot \overset{(1)}{a} \cdot \overset{(2)}{a} \cdot \overset{(3)}{a} \cdots\cdots \overset{(n)}{a}$$
$$= \overset{(1)}{a} \cdot \overset{(2)}{a} \cdot \overset{(3)}{a} \cdots\cdots \overset{(m+n)}{a} = a^{m+n}.$$

Ebenso ist $a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}$.

3) Umkehrung $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ ist wichtig beim Absondern von Factoren, z. B. $3a^7 + 8a^5 = a^5(3a^2 + 8)$.

4) Potenzen mit gleichen Dignanden werden dividirt, indem man den kleineren Exponenten vom größeren abzieht und den mit der Differenz potenzirten gemeinschaftlichen Dignanden als Dividendus oder Divisor schreibt, je nachdem der Dividendus oder Divisor den größeren Exponenten hat.

Beh. $a^m : a^n = a^{m-n}$, wenn $m > n$ ist;
$a^m : a^n = 1$, wenn $m = n$ ist; und
$a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$, wenn $m < n$ ist.

Beweis. 1) Wenn $m > n$, d. h. wenn $m = n + x$ ist, so ist

$$a^m : a^n = \frac{\overset{(1)}{a} \cdot \overset{(2)}{a} \cdot \overset{(3)}{a} \cdots\cdots \overset{(n+x)}{a}}{\overset{(1)}{a} \cdot \overset{(2)}{a} \cdot \overset{(3)}{a} \cdots\cdots \overset{(n)}{a}} \text{ oder gehoben } = \overset{(1)}{a} \cdot \overset{(2)}{a} \cdot \overset{(3)}{a} \cdots\cdots \overset{(x)}{a} = a^x.$$

x ist aber $= m - n$, also ist $a^m : a^n = a^{m-n}$.

2) Wenn $m = n$ ist, so ist $a^m = a^n$, also $a^m : a^n = 1$.

3) Wenn endlich $m < n$, d. h. $n = m + x$ ist, so ist

$$a^m : a^{m+x} = \frac{\overset{(1)}{a} \cdot \overset{(2)}{a} \cdot \overset{(3)}{a} \cdots\cdots \overset{(m)}{a}}{\overset{(1)}{a} \cdot \overset{(2)}{a} \cdot \overset{(3)}{a} \cdots\cdots \overset{(m+x)}{a}} \text{ oder gehoben} = \frac{1}{\overset{(1)}{a} \cdot \overset{(2)}{a} \cdot \overset{(3)}{a} \cdots\cdots \overset{(x)}{a}} = \frac{1}{a^x}.$$

x ist aber $= n - m$, also ist $a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$.

Anmerkung. Dieser Satz ist wichtig beim Heben der Brüche.

5) Ein Produkt wird potenzirt, indem man alle Factoren potenzirt und die einzelnen Potenzen multiplicirt, oder in Formel

$$(ab)^m = a^m \cdot b^m \text{ oder } (abc)^m = a^m b^m c^m.$$

Beweis einfach aus dem Begriff der Potenz.

6) Die Umkehrung von 5) liefert den Satz:

Potenzen mit gleichen Exponenten werden multiplicirt, indem man die Dignanden multiplicirt und ihr Produkt mit dem gemeinschaftlichen Exponenten potenzirt,

oder in Formel $a^m \cdot b^m = (ab)^m$; $a^m \cdot b^m \cdot c^m = (abc)^m$.

7) Ein Bruch wird potenzirt, indem man Zähler und Nenner potenzirt und die Potenzen durch einander dividirt,

oder in Formel $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

Beweis einfach.

8) Die Umkehrung der Formel in 7) giebt $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ oder in Worten?

Anmerkung. Unter welchen Bedingungen können Potenzen mit einander multiplicirt oder durch einander dividirt werden? Und wie wird die Multiplikation oder Division ausgeführt?

9) Eine Potenz wird potenzirt, indem man den Dignanden mit dem Produkte der Potenzexponenten potenzirt, oder in Formel $(a^m)^n = a^{mn}$.

Beweis. $(a^m)^n = \overset{(1)}{a^m} \cdot \overset{(2)}{a^m} \cdot \overset{(3)}{a^m} \cdots\cdots \overset{(n)}{a^m} = a^{\overset{(1)}{m}+\overset{(2)}{m}+\overset{(3)}{m}+\cdots\cdots+\overset{(n)}{m}} = a^{mn}$.

$(a^n)^m$ ebenso $= a^{mn}$.

Anmerkung. Diesem Lehrsatze kann man auch folgenden Wortlaut geben: Bei wiederholtem Potenziren desselben Dignanden ist die Reihenfolge des Potenzirens mit den Exponenten willkürlich, und es kann auch einmaliges Potenziren mit dem Produkte der Exponenten dafür eintreten.

10) Die Potenzen positiver Dignanden sind positiv; die

Potenzen negativer Dignanden aber positiv oder negativ, je nachdem die Potenzexponenten gerade oder ungerade sind.

Beweis 1. Produkte positiver Factoren sind stets positiv.

Beweis 2.

$$(-a)^{2m} = \underbrace{\overset{(1)}{(-a)} \cdot \overset{(2)}{(-a)}} \cdot \underbrace{\overset{(3)}{(-a)} \cdot \overset{(4)}{(-a)}} \cdots\cdots \cdot \underbrace{\overset{(2m-1)}{(-a)} \cdot \overset{(2m)}{(-a)}}$$

$$= \overset{(1)}{(+a^2)} \cdot \overset{(2)}{(+a^2)} \cdots\cdots\cdots\cdots \overset{(m)}{(+a^2)}$$

$$= (+a^2)^m = +a^{2m}.$$

$$(-a)^{2m+1} = (-a)^{2m} \cdot (-a) = (+a^{2m}) \cdot (-a) = -a^{2m+1}.$$

§ 62 [§ 53] (Heis § 40).

Quadrat einer Summe oder Differenz.

$$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = (a-b) \cdot (a-b) = a^2 - 2ab + b^2.$$

In Worten: Das Quadrat einer zweigliedrigen algebraischen Summe ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Addenden, vermehrt um das doppelte Produkt aus den Addenden.

Zusatz 1. $(a+b+c+d+\cdots\cdots)^2 = a^2 +$

$$+ 2ab + b^2$$
$$+ 2(a+b)c + c^2$$
$$+ 2(a+b+c)\,d + d^2$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots;$$

$$(a+b-c)^2 = \{(a+b) - c\}^2$$
$$= (a+b)^2 - 2\,(a+b)\,c + c^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 - 2\,(a+b)\,c + c^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2;$$

u. s. w.

In Worten: Das Quadrat einer mehrgliedrigen algebraischen Summe ist gleich der Summe der Quadrate aller einzelnen Addenden, vermehrt um das doppelte Produkt aus je zweien derselben mit Berücksichtigung ihrer Vorzeichen.

Zusatz 2. Diese Formeln kann man benutzen, um das Quadrat einer mehrziffrigen Zahl zu berechnen. Es geschieht dies nach folgendem Schema:

$\overset{a\,b\,c\,d}{(3794)} = 14\,394\,436$, wobei a, b, c, d die Werthe 3000, 700, 90, 4 besitzen:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= 3000^2 &&= 9000000\\
+2ab &= 2.3000.700 &&= 4200000\\
+b^2 &= 700^2 &&= 490000\\
+2(a+b)c &= 2\cdot(3000+700)\cdot 90 &&= 666000\\
+c^2 &= 90^2 &&= 8100\\
+2(a+b+c)d &= 2\cdot(3000+700+90)\cdot 4 &&= 30320\\
+d^2 &= 4^2 &&= 16\\
\hline
& && 14394436
\end{aligned}
$$

oder nach folgendem abgekürzten Schema, in welchem den Buchstaben nur die Zifferwerthe 7, 3, 8 beigelegt sind:

$\overset{a\,b\,c}{(73,8)}^2 = 5\,446,44$; denn es ist:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= 7^2 &&= 49\\
+2ab &= 2\cdot 7\cdot 3 &&= 42\\
+b^2 &= 3^2 &&= 9\\
+2(10a+b)c &= 2\cdot 73\cdot 8 &&= 1168\\
+c^2 &= 8^2 &&= 64\\
\hline
& && 544644.
\end{aligned}
$$

§ 63 [§ 54].

Cubus einer Summe oder Differenz.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)^2\cdot(a+b) = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
&= a^3+3ab(a+b)+b^3\\
(a-b)^3 &= (a-b)^2\cdot(a-b) = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\\
&= a^3-3ab(a-b)-b^3.
\end{aligned}
$$

In Worten: **Der Cubus einer zweigliedrigen algebraischen Summe ist gleich der Summe der Cuben der algebraischen Addenden, vermehrt um das Produkt aus ihrem dreifachen Produkt in ihre Summe.**

Zusatz. Die Berechnung des Cubus einer Zahl kann nach einem entsprechenden Schema wie oben bewirkt werden.

Anmerkung 1. $(a\pm b)^n$ läßt sich für jeden Specialwerth von n durch fortgesetzte successive Multiplikation mit $(a\pm b)$ herleiten; das allgemeine Gesetz für den entwickelten Ausdruck giebt später der „binomische Lehrsatz".

Anmerkung 2. Aus Vorstehendem folgt, daß

$a^n \pm b^n$ **nicht** $= (a\pm b)^n$

ist, daß also Potenzen mit gleichen Exponenten sich **nicht** addiren oder subtrahiren lassen, indem man die Dignanden addirt oder subtrahirt.

§ 64 [§ 55]. Lehrsätze.

Größeres (absolut) mit Gleichem potenzirt giebt Größeres.

Beweis. Ist $a > b$, so ist $a \cdot a > b \cdot b$, d. h. $a^2 > b^2$,
und $a \cdot a \cdot a > b \cdot b \cdot b$, d. h. $a^3 > b^3$,
also auch $a^m > b^m$.

Gleiches mit Größerem potenzirt giebt Kleineres oder Größeres, je nachdem der Dignand kleiner oder größer als 1 ist.

Beweis. Ist $a < 1$ oder $a > 1$
so ist $a^2 < a$ „ $a^2 > a$
$a^3 < a^2$ „ $a^3 > a^2$
u. s. w. u. s. w.

Zusatz. Alle Potenzen von Zahlen, welche größer als 1 sind, müssen demnach auch größer als 1 sein und mit wachsendem Potenzexponenten zunehmen; aber alle Potenzen von Zahlen, welche kleiner als 1 sind, sind auch kleiner als 1 und nehmen mit wachsendem Potenzexponenten ab.

B. Erweiterung des Potenzbegriffs.

§ 65 [§ 57] (Heis § 39).

Bei der Division zweier Potenzen mit gleichen Grundzahlen haben wir oben ein dreifaches Resultat erhalten. Wir fanden nämlich

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ wenn } m > n;$$
$$= 1, \text{ wenn } m = n;$$
$$= \frac{1}{a^{n-m}}, \text{ wenn } m < n.$$

Da man nun bei Buchstabenexponenten selten weiß, welcher der 3 Fälle durch die unbestimmten Exponenten vertreten ist, so würde man in den meisten Fällen nicht wissen, mit welchem der 3 Resultate die Rechnung weiter zu führen ist, und muß deshalb darauf bedacht sein, alle 3 Resultate durch ein einziges zu ersetzen, welches dieselben im Einklange mit dem Potenzbegriff vertreten kann. Mit Rücksicht auf das, was früher über die Differenz $(m - n)$ gesagt ist, liegt es nahe, a^{m-n} als diesen Vertreter anzusehen, so daß allgemein $a^m : a^n = a^{m-n}$ ist, und es ist daher nur zu untersuchen, ob dieses Resultat für $m = n$ und für $m < n$ mit dem Begriff der Potenz sich vereinigen läßt, nach welchem eine Po-

tenz ein Produkt von gleichen Factoren ist, deren jeder gleich der Grundzahl, deren Anzahl aber gleich dem Potenzexponenten ist.

Nun giebt $a^m : a^n$, wenn $m = n$ ist, nach Früherem 1, nach der jetzigen allgemeinen Form a^0; nach dem Begriff der Potenz hat dies Zeichen a^0 keinen Sinn. Ebenso wenig ist das Resultat der Division $a^m : a^n$, wenn $m < n$ ist, nämlich a^{m-n} oder $a^{-(n-m)}$, welches nach dem Früheren gleich $\frac{1}{a^{n-m}}$ ist, mit dem Begriff der Potenz zu vereinigen. Da aber, wie sofort nachgewiesen werden wird, alle Sätze, welche von Potenzen mit positiven Exponenten gelten, auch für Symbole von der Form a^0 oder a^{-x}, Giltigkeit haben, so bezeichnet man auch diese Symbole als Potenzen mit dem Exponenten 0, bezüglich mit negativen Exponenten.

Da nach Obigem $a^0 = 1$ ist, so ist die 0te Potenz jeder Zahl gleich der Einheit.

Das Symbol a^{-x} hingegen ist nur ein anderer Ausdruck für $\frac{1}{a^x}$, d. h. jede Potenz mit negativem Exponenten ist ein Symbol für die Reciproke derselben Potenz mit positivem Exponenten.

Denn nach dem Früheren ist, wenn $n = m + x$ ist,

$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} = \frac{1}{a^x}$; nach der allgemeineren Regel ist aber

$\frac{a^m}{a^n}$ auch $= a^{m-n} = a^{-x}$; also ist $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

Demnach ist z. B. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \left(\frac{b}{a}\right)^p = \frac{b^p}{a^p}$.

Um Potenzen mit positiven Exponenten und die sogenannten Potenzen mit negativen Exponenten oder mit dem Exponenten 0 unter einem gemeinsamen Potenzbegriff vereinigen zu können, muß man die Erklärung des Potenzirens dahin erweitern, daß sie lautet:

Eine Zahl a mit einer algebraischen Zahl ($\pm m$) potenziren bedeutet, die Einheit mmal hinter einander mit a multipliciren oder durch a dividiren, je nachdem der Exponent positiv oder negativ ist.

Es ist einleuchtend, daß diese Erklärung mit der ursprünglichen, im § 9 gegebenen übereinstimmt, so lange m eine positive ganze Zahl ist. — Das Symbol a^0 würde nach dieser Erklärung bedeuten, daß die Einheit 0mal, d. h. gar nicht mit a multiplicirt werden, daß sie also unverändert

bleiben soll; mithin ist a^0 nach dieser Erklärung $= 1$. — Wenn hingegen m eine negative ganze Zahl, z. B. $-x$ bezeichnet, so bedeutet a^{-x}, daß die Einheit xmal durch a dividirt werden soll; das Resultat würde aber $= \frac{1}{a^x}$ sein. Also ist $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

§ 66 [§ 57]. Lehrsatz.

Alle im § 61 Nr. 1—10 bewiesenen Lehrsätze über Potenzen mit positiven Exponenten gelten auch für Potenzen mit negativen Exponenten und mit dem Exponenten 0.

Beh. 1. $a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n} = a^{m+(-n)}$; $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m-n} = a^{(-m)+(-n)}$.

Beweis 1. $a^m \cdot a^{-n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^{(+m)+(-n)}$.

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{(-m)+(-n)}.$$

Ebenso ist $a^0 \cdot a^m = a^m$, da $a^0 = 1$ ist.

Beh. 2. $a^m : a^{-n} = a^{m-(-n)} = a^{m+n}$; $a^{-m} : a^{-n} = a^{-m-(-n)} = a^{n-m}$.

Beweis 2. $a^m : a^{-n} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m \cdot a^n = a^{m+n} = a^{(+m)-(-n)}$.

$$a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{(-m)-(-n)}.$$

Ebenso ist $a^0 : a^{-m} = a^{+m}$, da $a^0 = 1$ ist.

Beh. 3. $(ab)^{-m} = a^{-m} \cdot b^{-m}$.

Beweis 3. $(ab)^{-m} = \frac{1}{(ab)^m} = \frac{1}{a^m \cdot b^m} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{b^m} = a^{-m} \cdot b^{-m}$.

Beh. 4. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}}$.

Beweis 4. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \frac{1}{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\frac{1}{a^m}}{\frac{1}{b^m}} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}}$.

Beh. 5. $(a^m)^{-n} = a^{-mn}$; $(a^{-m})^{-n} = a^{mn}$.

Beweis 5. $(a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn} = a^{m \cdot (-n)}$

$$(a^{-m})^{-n} = \frac{1}{(a^{-m})^n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{mn}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-mn} = a^{mn} = a^{(-m) \cdot (-n)}.$$

§ 67. Zusatz.

Mit Hülfe der Formel $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ kann man Potenzen mit negativen Exponenten, welche in einer algebraischen Formel vorkommen, beseitigen. Steht nämlich eine solche Potenz als Factor im Zähler eines Bruches, so kann sie mit demselben positiven Exponenten in den Nenner gesetzt werden, und umgekehrt.

Beispiel. $\frac{9a^{-7}b^3c^{-5}}{8d^{-4}e^{-6}f^{-2}}$ ist $= \frac{9b^3d^4e^6f^2}{8a^7c^5}$ oder auch $\frac{9}{8}\, a^{-7}b^3c^{-5}d^4e^6f^2$.

$\frac{17}{3}\, a^4b^{-7}c^{-6}d^5e^2$ ist $= \frac{17a^4d^5e^2}{3b^7c^6}$.

Anmerkung. Da nach dem Vorhergehenden eine Potenz im Nenner gleich ist derselben Potenz mit negativem Exponenten im Zähler, so müssen in einem Bruchpolynomium, welches nach fallenden Potenzen geordnet ist, die Glieder, in welchen die Potenzen der Hauptgröße im Nenner stehen, nach steigenden Exponenten sich folgen. Die übrigen Regeln über die Rechnung mit solchen Bruchpolynomien ergeben sich aus denen für ganze Polynomien mit Hülfe des Vorstehenden und der Sätze der Bruchlehre.

V. Kapitel.

Von den Zahlensystemen und Systembrüchen.

§ 68 [§ 58].

Ein Zahlensystem ist die Zusammenstellung der nach der Zahl der Einheiten aufsteigenden Zahlen, dargestellt mit Hülfe der Zahlzeichen oder Ziffern in gesetzmäßiger Aneinanderreihung. Jedes System hat seine bestimmte Grundzahl, welche das Gesetz für die Aneinanderreihung der Ziffern hergiebt, und bedarf zur Darstellung sämmtlicher Zahlen nur so vieler Ziffern, als die um 1 verringerte Grundzahl Einheiten hat, dazu noch des Zeichens 0. Für alle Grundzahlen kleiner als 10 reichen somit die üblichen Ziffern aus, für die größeren sind neue Zahlzeichen nöthig, z. B. für die Grundzahl XII noch ein Zeichen für X, z. B. φ und ein zweites für XI, ψ. Das Gesetz für Aneinanderreihung der Ziffern besteht nun darin, daß jede Ziffer ihren Zahlenwerth erst dadurch erhält, daß sie mit derjenigen Potenz der Grundzahl multiplicirt wird, deren Exponent ihrem um 1 verringerten Stellenzeiger von rechts nach links gleich ist. So ist also

3567 im decadischen System
$= 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 7$,
im dodecadischen (Grundzahl XII)
$= 3 \cdot XII^3 + 5 \cdot XII^2 + 6 \cdot XII + 7$,
im octadischen (Grundzahl VIII)
$= 3 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8 + 7$.

Nach Vorstehendem ist jede Systemzahl ein nach fallenden Potenzen der Grundzahl geordnetes Polynomium, dessen Hauptgröße eben die Grundzahl ist, während die Ziffern der einzelnen Stellen die Coëfficienten der einzelnen Glieder vertreten. Die Regeln für die 4 Grundrechnungsarten mit Systemzahlen sind deshalb dieselben, wie diejenigen für Polynomien; damit jedoch das Resultat der Rechnung sogleich als Zahl desselben Systems erscheint, darf kein Coëfficient größer sein als die um 1 verringerte Grundzahl; deshalb ist Folgendes bei Ausführung der Rechnungen zu beobachten:

1) Falls bei der Addition der unter einander geordneten gleichvielten Stellen in irgend einer Stelle eine zweiziffrige Zahl entsteht, so verbleibt nur die letzte Ziffer derselben in dieser Stelle, die erste tritt als mit der nach links nächstfolgenden Gruppe gleichnamig zu dieser als Addend hinzu.

Beispiel.

52973 + 1500φ Grundzahl XI

$$\begin{aligned} &= 5 \cdot XI^4 + 2 \cdot XI^3 + 9 \cdot XI^2 + 7 \cdot XI + 3 \\ &+ 1 \cdot XI^4 + 5 \cdot XI^3 + 0 \cdot XI^2 + 0 \cdot XI + \varphi \\ \hline &= 6 \cdot XI^4 + 7 \cdot XI^3 + 9 \cdot XI^2 + 1 \cdot XI + 2 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 7 \cdot XI \\ &= 67982. \end{aligned}$$

2) Falls bei der Subtraction die Ziffer einer Stelle des Minuendus kleiner ist, als die entsprechende Ziffer des Subtrahendus, so muß eine Einheit der links nächstfolgenden Stelle als um 1 höhere Potenz der Grundzahl zu Hülfe genommen werden.

Beispiel.

3φ527 — 2ψ89φ Grundzahl XII

$$\begin{aligned} &= 3 \cdot XII^4 + \varphi \cdot XII^3 + 5 \cdot XII^2 + 2 \cdot XII + 7 \\ &- 2 \cdot XII^4 - \psi \cdot XII^3 - 8 \cdot XII^2 - 9 \cdot XII - \varphi \\ &= 2 \cdot XII^4 + (9 + XII)\, XII^3 + (4 + XII)\, XII^2 \\ &\qquad + (1 + XII)\, XII + 7 + XII \\ &= 2 \cdot XII^4 - \psi \cdot XII^3 - 8 \cdot XII^2 - 9 \cdot XII - \varphi \\ \hline &= \qquad \varphi \cdot XII^3 + 8 \cdot XII^2 + 4 \cdot XII + 9 = \varphi 849. \end{aligned}$$

3) Auch bei der Multiplikation wird, wenn bei der Multiplikation irgend zweier Ziffern oder nachher bei der Addition der untereinandergeordneten gleichnamigen Ziffern eine zweiziffrige Zahl entsteht, ihre erste Ziffer ebenso als Addend der nach links nächstfolgenden Gruppe zugeordnet.

Beispiel.

7φ256·379 Grundzahl XI

```
         7φ256·379
               379
     -------------
           65405φ
          505659
         218757
     -------------
         2747523φ
```

4) Bei der Division wird, da die Dividenden sowohl, als die successiven Reste von vornherein nach demselben Gesetze geordnet sind, stets sogleich die erste Ziffer oder die beiden ersten Ziffern des Dividendus oder Restes durch die erste Ziffer des Divisors dividirt und dann ganz wie bei Polynomien verfahren, jedoch mit Rücksicht auf 1), 2) und 3).

Beispiel.

2747523φ : 379 Grundzahl XI

```
379|2747523φ|7φ256
    23φ8
    -----
     34φ5
     3412
     -----
       932
       747
      -----
       1963
       1761
       -----
        202φ
        202φ
        -----
```

§ 69 [§ 59].

Systembrüche, speciell Decimalbrüche.

Ein Decimalbruch (Systembruch) ist ein solcher Bruch, der bei beliebigem Zähler als Nenner irgend eine Potenz von 10 (der Grundzahl des Systems) hat. Man schreibt ihn abgekürzt, indem man nur seinen Zähler schreibt und von demselben von der Rechten nach der Linken soviel Ziffern abschneidet, als der Exponent der den Nenner bildenden

Potenz von 10 (der Grundzahl) Einheiten hat; sind nicht soviel Ziffern im Zähler vorhanden, so ersetzt man die fehlenden durch vorgesetzte Nullen. Vor dem Komma stehen somit die Ganzen des Bruchs; ist derselbe ein echter, so wird vor das Komma eine Null gesetzt.

Da hiernach 0,578 im decadischen Zahlensystem

$$= \frac{578}{10^3} = \frac{5 \cdot 10^2}{10^3} + \frac{7 \cdot 10}{10^3} + \frac{8}{10^3} = \frac{5}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{8}{10^3},$$

im dodecadischen

$$= \frac{578}{XII^3} = \frac{5}{XII} + \frac{7}{XII^2} + \frac{8}{XII^3}$$

ist, so erscheint jeder echte Decimalbruch (Systembruch) ebenfalls als ein nach fallenden Potenzen von 10 (der Grundzahl) geordnetes Polynomium, ist also genau nach demselben Gesetze geordnet, als die ganze Systemzahl, und deshalb ist auch jeder unechte Bruch vollständig nach demselben Gesetze geordnet.

Aus dem Vorstehenden folgt:

1) Daß in jedem Decimalbruche (Systembruch) eine Einheit irgend einer Stelle ihrem Werthe nach größer ist als alle folgenden Ziffern zusammen, daß also beim Abkürzen des Decimalbruchs (Systembruchs) an irgend einer Stelle der begangene Fehler kleiner ist, als eine Einheit der letzten beibehaltenen Stelle.

2) Daß ein Decimalbruch (Systembruch) mit 10 (der Grundzahl) oder einer Potenz von 10 (der Grundzahl) multiplicirt oder dividirt wird, wenn man das Komma um eine Stelle oder die dem Exponenten der Potenz gleiche Zahl der Stellen nach Rechts oder nach Links rückt.

3) Daß ein Decimalbruch (Systembruch) durch Anhängen oder Weglassen von Nullen am Ende hinter den geltenden Ziffern seinem Werthe nach nicht geändert, sondern dadurch nur durch die der Nullenzahl entsprechende Potenz von 10 (der Grundzahl) erweitert oder gehoben wird.

Darnach besteht das Gleichnamigmachen der Decimalbrüche (Systembrüche) einfach darin, daß man ihnen durch Anhängen von Nullen gleich viel Stellen nach dem Komma giebt.

§ 70 [§ 60] (Heis § 29, 30).

Rechnungen mit Systembrüchen.

1) Additions- und Subtractionsregel.

Die Regel für Addition und Subtraction der Brüche lautet für Decimalbrüche (Systembrüche):

Decimalbrüche (Systembrüche) werden addirt oder subtrahirt, indem man ihnen durch Anhängen von Nullen gleich viel Ziffern nach dem Komma verschafft, die gleichnamigen Ziffern unter einander setzt, ohne Rücksicht auf das Komma addirt oder subtrahirt und der erhaltenen Summe oder Differenz so viel Ziffern nach dem Komma giebt, als jeder Bruch hatte. Die Nullen können bei dem Addiren stets, und bei dem Subtrahiren in dem Falle, daß der Minuendus ursprünglich mehr Ziffern nach dem Komma hatte, als der Subtrahendus, auch nur hinzugedacht werden, da sie auf die Rechnung ohne Einfluß sind, sobald man nur richtig Komma unter Komma und die gleichnamigen Ziffern unter einander setzt.

2) Multiplikationsregel.

Decimalbrüche (Systembrüche) werden multiplicirt, indem man ohne Rücksicht auf das Komma multiplicirt und dem erhaltenen Produkte so viel Ziffern nach dem Komma giebt, als die Factoren zusammen haben; etwa fehlende werden durch vorgesetzte Nullen ersetzt.

3) Divisionsregel.

Decimalbrüche (Systembrüche) werden dividirt, indem man ihnen durch Anhängen von Nullen gleich viel Ziffern nach dem Komma giebt und ohne Rücksicht auf das Komma dividirt, den hierbei bleibenden Rest aber nach den sogleich folgenden Regeln in einen Systembruch verwandelt.

§ 71 [§ 61].

Verwandlung gemeiner Brüche in Decimal- (System-) Brüche.

Soll ein gewöhnlicher Bruch in einen Decimalbruch (Systembruch) verwandelt werden, so dividirt man zunächst, um die etwa vorhandenen Ganzen abzusondern, den Zähler durch den Nenner und setzt nach den erhaltenen Ganzen das Komma. Dann wird der durch die 10 (die Grundzahl) erweiterte Rest — also der Rest mit einer angehängten Null — durch denselben Divisor dividirt, um die ganzen Einheiten der ersten Stelle nach dem Komma, der Zehntel, zu finden und so mit jedem folgenden Reste verfahren, bis entweder die Division aufgeht, oder dieselben Ziffern in derselben Reihenfolge wiederkehren. Im ersten Falle heißt der erhaltene Decimalbruch (Systembruch) rational, im zweiten Falle irra-

tional. Der Complex der im letzteren Falle wiederkehrenden Ziffern wird eine Periode, der Bruch periodisch genannt, und zwar reinperiodisch, wenn die Periode unmittelbar hinter dem Komma beginnt, dagegen unreinperiodisch, wenn dies nicht der Fall ist, d. h. wenn unmittelbar hinter dem Komma Ziffern stehen, welche nicht zur Periode gehören. Ueber dem die Periode bildenden Zifferncomplex pflegt man einen waagerechten Strich und hinter den Ziffern der Periode einige Punkte zu machen, um die Periode anzudeuten. Die Anzahl der Ziffern der Periode kann nach der Art wie diese Ziffern gewonnen werden, höchstens um eine Einheit geringer sein, als der Nenner des gemeinen Bruches ist. Da Decimalbrüche (Systembrüche) dadurch charakterisirt sind, daß ihre Nenner Potenzen von 10 (der Grundzahl) sein müssen, so wird ein gewöhnlicher Bruch nur dann durch einen Decimalbruch (Systembruch) genau sich darstellen lassen, wenn sich sein Nenner durch Erweiterung des Bruches in eine Potenz von 10 (der Grundzahl) verwandeln läßt, und dieses ist nur dann möglich, wenn derselbe keine anderen Theiler hat, als die Theiler von 10 (der Grundzahl). Nur in dem Falle also, daß der Nenner des gewöhnlichen Bruches sich nur durch 2 oder durch 5 dividiren läßt, kann der entstehende Decimalbruch rational sein: $\frac{3}{40} = 0{,}075$.

Wenn aber der Nenner des in einen Decimalbruch (Systembruch) zu verwandelnden gewöhnlichen Bruches sich nicht durch 2 oder 5 (die Theiler der Grundzahl) dividiren läßt, so wird der entstehende Decimalbruch (Systembruch) reinperiodisch sein: $\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}66 \ldots$

Ist endlich der Nenner des gemeinen Bruches sowohl durch 2 oder 5 (die Theiler der Grundzahl), als auch durch andere Zahlen, welche nicht Vielfache von Potenzen von 2 oder 5 sind, theilbar, so wird der entstehende Decimalbruch (Systembruch) unreinperiodisch sein: $\frac{7}{22} = 0{,}3\overline{18}18 \ldots$

§ 72 [§ 62].

Verwandlung der Decimal- (System-) Brüche in gewöhnliche Brüche.

Soll ein rationaler Decimalbruch (Systembruch) durch einen gewöhnlichen Bruch ersetzt werden, so hat man ihm nur seinen hinzugedachten Nenner, also die der Stellenzahl nach dem Komma entsprechende Potenz von 10 (der Grundzahl) wirklich beizufügen und, wenn möglich, zu heben.

Beispiel. $0{,}625 = \frac{625}{10^3} = \frac{625}{1000} = \frac{5}{8}$; $0{,}8745 = \frac{8745}{10000} = \frac{1749}{2000}$.

Ein reinperiodischer Decimalbruch wird in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt, indem man die Periode als Zähler und so viel Neunen als Nenner schreibt, als die Periode Ziffern hat, und, wenn möglich, hebt.

Beweis. Es sei der noch unbekannte gewöhnliche Bruch, der mit dem Decimalbruche $0,\overline{45}45\cdots$ gleichen Werth hat, gleich $\frac{x}{y}$; durch Multiplikation mit der Potenz von 10, welche die Stellenzahl der Periode zum Exponenten hat, erhält man:

$$10^2 . \frac{x}{y} = 100\frac{x}{y} = 45,\overline{45}45\cdots$$ Subtrahirt man davon

$$\frac{x}{y} = 0,\overline{45}45\cdots,$$ so bleibt als Rest

$$99\frac{x}{y} = 45.$$ Daraus folgt dann

$\frac{x}{y} = \frac{45}{99}$ oder $\frac{5}{9}$, also $x = 45$ und $y = 99$.

Beispiel. $0,\overline{621}6\cdots = \frac{621}{999} = \frac{23}{37}$; $6,\overline{857142}8\cdots = 6\frac{857142}{999999} = 6\frac{6}{7}$.

Ein unreinperiodischer Decimalbruch wird in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt, indem man die durch die nicht periodischen Ziffern gebildete Zahl von der durch alle Ziffern vom Komma bis zum Ende der Periode gebildeten Zahl subtrahirt, die entstehende Differenz als Zähler benutzt und den Nenner aus so viel Neunen, als die Periode Ziffern hat, und so viel Nullen, als unperiodische Ziffern vorhanden sind, bildet.

Beweis. Es sei der noch unbekannte gewöhnliche Bruch, der denselben Werth wie der Decimalbruch $0,67\overline{3}3\cdots$ hat, gleich $\frac{x}{y}$; dann erhält man durch Multiplikation mit der Potenz von 10, welche die Anzahl der unperiodischen Ziffern zum Exponenten hat, einen reinperiodischen Decimalbruch:

$$10^2 \cdot \frac{x}{y} = 100\frac{x}{y} = 67,\overline{3}3\cdots$$

Diesen verwandelt man nach obiger Regel in einen gewöhnlichen Bruch:

$$1000\frac{x}{y} = 673,\overline{3}3\cdots$$

$$100\frac{x}{y} = 67,\overline{3}3\cdots$$

$$900\frac{x}{y} = 673 - 67;$$ und daraus folgt

$$\frac{x}{y} = \frac{673-67}{900} = \frac{606}{900} = \frac{101}{150}.$$

Beispiel. $0,3\overline{18}18\cdots = \frac{318-3}{990} = \frac{315}{990} = \frac{7}{22}$.

§ 73 [§ 63].

Verwandlung der Systemzahlen und Systembrüche.

1) Soll eine ganze decadische Zahl in eine Zahl eines anderen Systems verwandelt werden, so bildet man die Potenzen der neuen Grundzahl in decadischer Form, dividirt die decadische Zahl durch die ihr am nächsten kommende niedrigere Potenz der neuen Grundzahl, den Rest durch die nächstniedrigere und so fort, bis die Division aufgeht, und reiht dann die Quotienten nach ihren durch die Exponenten der successiven Divisoren bestimmten Stellenzeigern an einander.

Beispiel. 169889 heißt wie für die Grundzahl 9?

$9^0 = 1,\ 9^1 = 9,\ 9^2 = 81,\ 9^3 = 729,\ 9^4 = 6561,\ 9^5 = 59049$

```
59049|169889|2
      118098
6561 |51791|7     also = 278035
      45927
 729 |5864|8
      5832
  81 |32|0
   9 |32|3
      27
   1 |5|5
      5
```

2) Soll ein Decimalbruch in einen Systembruch verwandelt werden, so verwandelt man zunächst die ganze Zahl nach 1), multiplicirt dann weiter den Bruch mit der neuen Grundzahl, den Bruchtheil des decadischen Produktes wieder mit der Grundzahl und so fort und erhält in den bei diesen Multiplikationen links vom Komma stehenden Ziffern die Ziffern des neuen Systembruchs, der endlich oder periodisch sein muß.

Beispiel 1): 19,3125 heißt wie für die Grundzahl 12?

```
12|19|1 = 17,     0,3125
   12                 12
 1|7|7              6250
   7               3125
                  3,7500; also erste Ziffer: 3
                  0,75
                    12
                   150
                   75
                  9,00; zweite Ziffer: 9; also 17,39
```

Grund. $0{,}3125 = \frac{3125}{10000} = \frac{12 \cdot 3125}{120000} = \frac{3{,}7500}{12} = \frac{3}{12} + \frac{75}{12 \cdot 100}$

$= \frac{3}{12} + \frac{12 \cdot 75}{12^2 \cdot 100} = \frac{3}{12} + \frac{900}{12^2 \cdot 100} = \frac{3}{12} + \frac{9}{12^2}$

$= 0{,}39$
$+17 = 17{,}39.$

Beispiel 2) : 16,9 heißt wie für die Grundzahl 7?

$7|16|2 = 22,$ $0{,}9$
14 7
$1|2|2$ $6{,}3$; erste Ziffer: 6.
2 $0{,}3$

7
$2{,}1$; zweite Ziffer: 2.
$0{,}1$
7
$0{,}7$; dritte Ziffer: 0.
$0{,}7$
7
$4{,}9$; vierte Ziffer: 4.
$0{,}9$
7
$6{,}3$; fünfte Ziffer: 6.
Dann folgt die Periode
also $= 22{,}62046204 \cdots\cdots$

3) Soll eine ganze Systemzahl in eine decadische Zahl verwandelt werden, so berechnet man mit Rücksicht auf den Stellenzeiger die decadischen Werthe der einzelnen Ziffern und addirt alle diese Werthe.

Beispiel. 127356 für die Grundzahl 8 heißt wie im decadischen Zahlensystem?

$$127356 = 1 \cdot 8^5 + 2 \cdot 8^4 + 7 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 6$$
$$= 1 \cdot 32768 + 2 \cdot 4096 + 7 \cdot 512 + 3 \cdot 64 + 5 \cdot 8 + 6$$

$= 32768$
8192
3584
192 $= 44782$
40
$6.$

4) Soll ein Systembruch in einen Decimalbruch verwandelt werden, so schreibt man ihn als gewöhnlichen Bruch desselben Systems, verwandelt Zähler und Nenner nach 3) in decadische Zahlen und den so erhaltenen Bruch in einen Decimalbruch.

Beispiel. 135,6 für die Grundzahl 7 heißt wie als Decimalbruch?

$$135,6 = \frac{1356}{10} = \frac{1\cdot7^3+3\cdot7^2+5\cdot7^1+6}{1\cdot7} = \frac{531}{7} = 75,\overline{857142}8\cdots$$

5) Soll eine Systemzahl in eine andere Systemzahl verwandelt werden, so verwandelt man sie, ob ganz oder gebrochen, zuerst in eine Decimalzahl, dann diese in die Zahl des verlangten Systems.

Beispiel 1): 271352 für die Grundzahl 8 heißt wie für die Grundzahl XI?

$$\begin{aligned} 271352 &= 2\cdot8^5+7\cdot8^4+1\cdot8^3+3\cdot8^2+5\cdot8+2 \\ &= 2\cdot32768+7\cdot4096+1\cdot512+3\cdot64+5\cdot8+2 \\ &= \begin{array}{r} 65536 \\ 28672 \\ 512 \\ 192 \\ 40 \\ 2 \\ \hline 94954 \end{array} \end{aligned}$$

$$11^0 = 1,\ 11^1 = 11,\ 11^2 = 121,\ 11^3 = 1331,\ 11^4 = 14641$$

$$\begin{array}{r|r|l} 14641 & 94954 & 6 \\ & 87846 & \\ \hline 1331 & 7108 & 5 \\ & 6655 & \\ \hline 121 & 453 & 3 \\ & 363 & \\ \hline 11 & 90 & 8 \\ & 88 & \\ \hline 1 & 2 & 2 \\ & 2 & \end{array} \quad = 65382.$$

Beispiel 2): 211,012 für die Grundzahl 3 heißt wie für die Grundzahl 9?

$$211,012 = \frac{211012}{1000} = \frac{2\cdot3^5+1\cdot3^4+1\cdot3^3+0\cdot3^2+1\cdot3+2}{1\cdot3^3+0\cdot3^2+0\cdot3+0}$$

$$= \begin{array}{r} 486 \\ 81 \\ 27 \\ 3 \\ 2 \\ \hline 599 \end{array} = \frac{599}{27} = 22\frac{5}{27}.$$

$$\begin{array}{l} 9|22|2 \\ \underline{18} \\ 1|4|4 \\ \underline{4} \end{array}$$ also 24 Ganze. $\frac{5}{27}$ heißt für die Grundzahl 9: $\frac{5}{30}$

$$\begin{array}{r} 30|50|16 \\ \underline{30} \\ 200 \\ \underline{200} \end{array}$$

also 24,16.

VI. Kapitel.

A. Erklärung und Lehrsätze des Radicirens.

§ 74 [§ 12]. Erklärung.

Wie schon im § 10 angedeutet wurde, ist das Radiciren (Wurzelausziehen) eine dem Potenziren entgegengesetzte Rechenoperation. Beim Radiciren soll nämlich aus dem bekannten Werthe einer Potenz und aus dem ebenfalls gegebenen Potenzexponenten die zugehörige Grundzahl der Potenz bestimmt werden. Die gegebene Potenz heißt jetzt Grundzahl der Wurzel oder Radikandus, und der gegebene Potenzexponent wird zum Wurzelexponenten; die gesuchte Grundzahl wird hingegen Wurzel genannt und durch das Zeichen $\sqrt{}$ (r-adix) angedeutet; unter diesem Zeichen steht der Radikand, über demselben der Wurzelexponent. Die charakteristische Eigenschaft einer Wurzel besteht also darin, daß sie, mit dem Wurzelexponenten potenzirt, den Radikandus als Potenz giebt. Eine Zahl mit einer anderen radiciren heißt demnach, diejenige dritte Zahl finden, welche mit der zweiten potenzirt, die erste giebt, d. h. wenn

$\sqrt[m]{a}$ (lies m^{te} Wurzel aus a) $= b$ ist, so ist $a = b^m$, und wenn

$b^m = a$ ist, so ist $b = \sqrt[m]{a}$.

Hieraus folgt gleichzeitig, daß

1) $(\sqrt[m]{a})^m = a$, und daß 2) $\sqrt[m]{a^m} = a$ ist, d. h. Potenziren und Radiciren an und mit derselben Zahl der Reihe nach vollzogen, vernichten sich.

Anmerkung 1. Zufolge der Erklärung des Radicirens muß die erste Wurzel aus jeder Zahl gleich dieser Zahl selbst sein: $\sqrt[1]{a} = a$. Die zweite Wurzel $\sqrt[2]{a}$ oder $\sqrt{a}$,

wird die Quadratwurzel, die dritte Wurzel, $\sqrt[3]{a}$, die Cubikwurzel aus a genannt.

Anmerkung 2. Offenbar kann das Radiciren nur dann vollständig ausgeführt werden, wenn der Radikand eine so vielte Potenz ist, als der Wurzelexponent angiebt. Aus einer algebraischen Summe kann deshalb nur dann z. B. die Quadratwurzel gezogen werden, wenn sie ein vollständiges Quadrat ist; mit Rücksicht auf § 63 Anmerkung 2 wird eine solche Rechnung nicht durch Radiciren der einzelnen Glieder bewirkt.

Anmerkung 3. Ebenso wie Potenzen können auch Wurzeln nur dann addirt oder subtrahirt werden, wenn sie gleiche Radikanden und gleiche Wurzelexponenten haben.

§ 75 [§ 64—70] (Heis § 42—46; 48).

Lehrsätze.

1. Ein Produkt wird radicirt, indem man seine einzelnen Factoren radicirt und alle erhaltenen Wurzeln multiplicirt.

Beweis. $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$, da $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$, mit m nach den Potenzsätzen potenzirt $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m \cdot \left(\sqrt[m]{b}\right)^m$, d. h. ab giebt. Die Ausdehnung auf mehr als zwei Factoren ist einfach.

2. Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten werden multiplicirt, indem man das Produkt der Radikanden mit dem gemeinsamen Wurzelexponenten radicirt, oder in Formel $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$.

Beweis durch Umkehrung des vorigen Satzes.

3. Ein Bruch wird radicirt, indem man Zähler und Nenner radicirt und die Wurzel aus dem Zähler durch die aus dem Nenner dividirt.

Beweis. $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ ist $= \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$, weil $\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{\left(\sqrt[m]{a}\right)^m}{\left(\sqrt[m]{b}\right)^m} = \frac{a}{b}$ ist.

4. Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten werden dividirt, indem man den Quotienten der Radikanden mit dem gemeinsamen Exponenten radicirt, oder in Formel

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}.$$

Beweis durch Umkehrung des vorigen Satzes.

Zusatz. Wurzeln können also nur dann mit einander multiplicirt oder durch einander dividirt werden, wenn sie gleiche Wurzelexponenten haben; und zwar wird die Multiplikation oder Division durch Multiplikation oder Division der Radikanden ausgeführt, während der gemeinsame Wurzelexponent unverändert bleibt.

5. Eine Potenz wird radicirt, indem man die Grundzahl der Potenz mit dem Quotienten aus Potenz- und Wurzelexponenten potenzirt.

Vor. In $\sqrt[n]{a^m}$ sei m durch n theilbar, z. B. $\frac{m}{n} = q$.

Beh. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^q$.

Beweis. Zufolge § 61,9 ist $(a^q)^n = a^{nq} = a^m$. Also ist a^q oder $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Zusatz. Jede Potenz läßt sich als Wurzel mit einem beliebigen Exponenten schreiben, wenn man sie, mit dem Wurzelexponenten potenzirt, zum Radikanden macht.

Beweis. Durch Umkehrung des vorigen Satzes ist $a^n = \sqrt[m]{a^{mn}}$.

6. Eine Wurzel wird potenzirt, indem man ihren Radikanden potenzirt, oder in Formel $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.

Beweis. $\sqrt[n]{a^m}$ ist die Zahl, welche mit n potenzirt, a^m giebt, d. h. $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n$ ist $= a^m$. Ebenso giebt $\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right)^n$ das Resultat a^m. Denn $\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right)^n$ ist nach den Potenzsätzen gleich $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{mn}$ oder $= \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^m$. Da aber $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ ist, so ist auch $\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right)^n = a^m$; also ist $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.

Anmerkung. Diesem Satze kann man auch folgenden Wortlaut geben: Die Reihenfolge, in der man eine Zahl mit einer anderen potenzirt und mit einer dritten radicirt, ist willkürlich.

7. Eine Wurzel wird radicirt, indem man den Radikanden mit dem Produkte der Wurzelexponenten radicirt.

Beweis. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ ist gleich $\sqrt[mn]{a}$, da sowohl $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$, als auch $\sqrt[mn]{a}$ mit m und n potenzirt den Radikanden a geben.

Anmerkung. Diesem Lehrsatze kann man auch folgenden Wortlaut geben: Bei wiederholtem Radiciren desselben Radikanden mit verschiedenen Wurzelexponenten läßt sich die Reihenfolge der Exponenten vertauschen und es kann auch einmaliges Radiciren mit dem Produkte der Exponenten dafür eintreten.

8. Eine Zahl wird mit einem Produkte radicirt, indem man mit allen einzelnen Factoren in beliebiger Reihenfolge radicirt.

Beweis durch Umkehrung des vorigen Satzes.

Beispiele.

$$\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}};\ \sqrt[6]{a} = \sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt{\sqrt[3]{a}};\ \sqrt[10]{a^5b^6} = \sqrt{\sqrt[5]{a^5 \cdot b^5 \cdot b}}$$

$$= \sqrt{ab\sqrt[5]{b}};\qquad \text{u. s. w.}$$

9. Eine Wurzel aus einer Potenz bleibt ungeändert, wenn man Potenzexponent und Wurzelexponent mit derselben Zahl multiplicirt, oder dividirt — vorausgesetzt, daß die Division in beiden Exponenten aufgeht.

Beh. $\sqrt[n]{a^m}$ soll $= \sqrt[np]{a^{mp}}$ sein, und $\sqrt[nq]{a^{mq}}$ soll $= \sqrt[n]{a^m}$ sein.

Beweis I. Nach Formel 1) in § 74. ist $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a$. Ebenso muß $\left(\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}}\right)^p = \sqrt[n]{a^m}$ sein. Es ist aber $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[np]{a^m}$; und $\left(\sqrt[np]{a^m}\right)^p$ ist $= \sqrt[np]{a^{mp}}$. Also ist $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$.

Beweis II. Es ist $\sqrt[nq]{a^{mq}} = \sqrt[n]{\sqrt[q]{(a^m)^q}}$; und da nach Formel 2) in § 74 $\sqrt[q]{(a^m)^q} = a^m$ ist, so ist

$$\sqrt[nq]{a^{mq}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Anmerkung. Der erste Theil dieses Satzes enthält das Mittel, zwei Wurzeln gleiche Exponenten zu verschaffen und sie dadurch multiplicirbar und dividirbar zu machen.

10. Jede Wurzel mit geradem Exponenten, speciell also jede Quadratwurzel, aus einer positiven Zahl hat 2 absolut gleiche, algebraisch entgegengesetzte Werthe.

Beweis. Da nach § 61,10

$(-a)^{2m} = (+a)^{2m} = +x$ ist, so ist umgekehrt

$\sqrt[2m]{(+x)} = +a$ oder $= -a$. — Ebenso ist $\sqrt{81} = \pm 9$, $\sqrt[6]{64} = \pm 2$.

Zusatz. Dagegen kann $\sqrt[2m]{-x}$ nicht existiren, weil keine negative Zahl eine $2m^{te}$ Potenz sein kann. Solche nach dem bisherigen Zahlbegriff nicht existirende Zahlen heißen in erweitertem Zahlbegriff imaginäre Zahlen; im Gegensatz zu ihnen heißen alle bisherigen reelle Zahlen.

11. Jede Wurzel mit ungeradem Exponenten hat stets einen reellen Werth, aber auch nur einen, welcher dasselbe Vorzeichen hat, als der Radikandus.

Da $(+a)^{2m+1} = (+a)^{2m}.(+a) = +x$, und $(-a)^{2m+1} = (+a)^{2m}.(-a) = -x$ ist, so ist umgekehrt $\sqrt[2m+1]{+x} = +a$ und $\sqrt[2m+1]{-x} = -a$.

Ebenso ist $\sqrt[3]{+27} = +3$, $\sqrt[5]{-32} = -2$, $\sqrt[7]{-8} = -\sqrt[7]{+8}$.

§ 76 [§ 71] (Heis § 47).

Erklärung der Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

In § 75,5 ist die Regel für Radicirung einer Potenz unter der Beschränkung bewiesen worden, daß der Potenzexponent durch den Wurzelexponenten dividirbar ist. Da man aber bei Buchstabenexponenten über diese Dividirbarkeit selten entscheiden kann und doch allgemeingiltige Resultate nöthig hat, so schreibt man in jedem Falle $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{m}{n}}$, betrachtet indessen in allen Fällen, wo diese Division nicht aufgeht, $a^{\frac{m}{n}}$ nur als ein zur Verallgemeinerung der Regel eingeführtes Symbol, da es als Potenz nach der bisherigen Erklärung sich nicht auffassen läßt. Entsprechend schreibt man dann auch $a^{\frac{1}{n}}$ für $\sqrt[n]{a^1} = \sqrt[n]{a}$, so daß allgemein

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n}.m} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \text{ ist.}$$

Ein solches Symbol, welches die Form einer Potenz mit gebrochenem Exponenten hat, stellt die Wurzel aus einer Potenz dar, deren Potenzexponent der Zähler und deren Wurzelexponent der Nenner des gebrochenen Exponenten ist. Man bezeichnet diese Symbole als Potenzen mit gebrochenen Exponenten (Bruchpotenzen, Potenzwurzeln), weil

für sie alle Sätze gelten, welche für Potenzen mit ganzen Exponenten in § 61,1—10 bewiesen worden sind. Es wird also behauptet, daß:

1) $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$.

Bew. $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}$

$= a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$;

2) $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$.

Bew. $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}} = \frac{\sqrt[nq]{a^{mq}}}{\sqrt[nq]{a^{np}}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$;

3) $(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$.

Bew. $(ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m \cdot b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$;

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$.

Bew. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$;

5) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$.

Bew. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}}$

$= a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$;

6) $a^{-\frac{m}{n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$.

Bew. $a^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$;

oder $\sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}}$.

B. Erweiterung des Zahlbegriffs durch Radiciren.

§ 77 [§ 72].

Die Erklärung von $\sqrt[m]{a}$ erforderte, daß der Radikand a eine m^{te} Potenz sei, da nur dann $\sqrt[m]{a}$ nach dem bisherigen Zahlbegriffe wirklich existirt. Denn wenn die ganze Zahl a keine m^{te} Potenz ist, d. h. wenn keine ganze Zahl existirt, welche zur m^{ten} Potenz erhoben, a giebt, so kann $\sqrt[m]{a}$ nur gleich einem Bruche, der sich nicht mehr heben läßt, sein, z. B. $= \frac{x}{y}$. Dann aber läßt sich auch $x \cdot \frac{x}{y}$ und $\frac{x \cdot x}{y \cdot y} = \frac{x^2}{y^2}$, und ebenso $\frac{x^m}{y^m} = \left(\frac{x}{y}\right)^m$ nicht mehr heben; $\left(\frac{x}{y}\right)^m$ kann also nur gleich einem Bruche, aber nie gleich einer ganzen Zahl sein; deshalb kann die ganze Zahl a, wenn sie keine m^{te} Potenz einer ganzen Zahl ist, überhaupt keine m^{te} Potenz einer Zahl im bisherigen Sinne sein.

Wenn indessen z. B. 5 auch kein genaues Quadrat ist, so liegt es doch

1) zwischen $4 = 2^2$ u. $9 = 3^2$
2) „ $4{,}84 = 2{,}2^2$ u. $5{,}29 = 2{,}3^2$
3) „ $4{,}9729 = 2{,}23^2$ u. $5{,}0176 = 2{,}24^2$
4) „ $4{,}999696 = 2{,}236^2$ u. $5{,}004169 = 2{,}237^2$

u. s. w.;

also liegt $\sqrt{5}$

1) zwischen 2 u. 3
2) „ 2,2 u. 2,3
3) „ 2,23 u. 2,24
4) „ 2,236 u. 2,237

u. s. w.

Da nun die Differenz der 1. Grenzen = 1, die der 2. = 0,1, die der 3. = 0,01, die der 4. = 0,001 ist u. s. w., so erweist sich $\sqrt{5}$ und ebenso $\sqrt[m]{a}$, wenn a keine m^{te} Potenz ist, als ein solcher Werth,

der zwar durch keine ganze oder gebrochene Zahl genau darstellbar ist, aber doch zwischen 2, ins Unendliche einander zu nähernden Grenzzahlen liegt und also bis zu jedem verlangten Grade der Genauigkeit, angenähert sich bestimmen läßt. Solch eine Zahl heißt eine Irrationalzahl, weil sie sich durch keinen Bruch (ratio) genau darstellen läßt. — Bilder der irrationalen Zahlen wird man erhalten, wenn man in Fig. 5. § 42 auf der horizontalen Linie zwischen den Punkten, welche die Brüche darstellen sollten, noch andere Punkte einschaltet.

Anmerkung. Betrachtet man die bisherigen Beweise vom Standpunkte des so erweiterten Zahlbegriffs, so haben sie, weil für die Grenzzahlen, auch für die Irrationalzahlen Giltigkeit.

C. Von den Quadrat- und Cubikwurzeln.

§ 78 [§ 73] (Heis § 50).

Aufgabe. Aus einer ganzen Zahl, welche ein vollständiges Quadrat ist, die Quadratwurzel zu ziehen.

Lösung.

1) Das Quadrat jeder einziffrigen Zahl ist ein- oder zweiziffrig, also ist umgekehrt die Quadratwurzel aus jeder ein- oder zweiziffrigen Zahl einziffrig. Man findet dieselbe mit Hülfe des Einmaleins.

2) Das Quadrat jeder 2ziffrigen Zahl liegt zwischen dem Quadrate von 10 und dem Quadrate von 100, ist also 3- oder 4ziffrig, folglich ist umgekehrt die Quadratwurzel aus jeder 3- oder 4ziffrigen Zahl zweiziffrig. Ebenso ist die Quadratwurzel aus jeder 5- oder 6ziffrigen Zahl 3ziffrig u. s. w., d. h. allgemein die Quadratwurzel aus einer $(2n-1)$ oder $2n$ziffrigen Zahl ist $n$ziffrig. Man bestimmt demgemäß aus dem gegebenen Radikanden die Anzahl der Ziffern der Wurzel, indem man den Radikanden von rechts nach links in Klassen zu je 2 Ziffern theilt und diese Klassen zählt, dabei aber eine vorn etwa übrig bleibende einzelne Ziffer als Klasse mitzählt.

3) Die Quadratwurzel aus einer 3- oder 4ziffrigen Zahl ist zweiziffrig, hat also, wenn x und y die Ziffern derselben sind, die Form $(10x+y)$; dem Begriffe der Wurzel entsprechend muß demnach der Radikand $= (10x+y)^2$ oder nach Früherem

$$= x^2 \cdot 100 + 2xy \cdot 10 + y^2$$

sein, muß also, wenn man diese Glieder successiv in Abzug bringt, 0 zum Reste geben. Man hat daher die größte Quadratzahl zu suchen, welche in der die erste Klasse bildenden Zahl enthalten ist,

daraus die Quadratwurzel zu ziehen und diese Ziffer als erste Ziffer (x) der Wurzel zu nehmen. Subtrahirt man von der ersten Klasse das Quadrat (x^2) dieser ersten Ziffer und zieht zu dem Reste das noch übrige Zifferpaar des Radikanden herunter, so muß in der so entstehenden Zahl die Summe des zwanzigfachen Produktes der ersten und zweiten Ziffer und des Quadrates der zweiten Ziffer der Wurzel enthalten sein, d. h. $20xy + y^2$ oder $(20x + y) \cdot y$. Um daher die zweite Ziffer der Wurzel (y) zu finden, dividirt man die erhaltene Restzahl durch das Zwanzigfache der ersten Ziffer, nimmt den Quotienten (der nur einziffrig, also nie größer als 9 sein darf) als zweite Ziffer der Wurzel, addirt ihn gleichzeitig zum Divisor und multiplicirt die so entstehende Zahl mit der zweiten Ziffer der Wurzel; der Rest muß = 0 sein.

Beispiel.

$$\begin{array}{rl} \sqrt{18|49} & x = 4 \\ x^2 = 16 & \\ 20x = 80 \;|249 & y = 3 \\ (20x+y)y = 83 \cdot 3 = 249 & \end{array}$$

also ist die Wurzel = 43.

4) Ist die zu radicirende Zahl mehrziffrig, so verfährt man zunächst genau ebenso. Hat man die beiden höchsten Ziffern der Wurzel ermittelt, so betrachtet man die so erhaltene Zahl als einziffrig, bezeichnet sie also etwa mit u und rechnet ebenso weiter wie oben, d. h. man hängt an den Rest die beiden Ziffern der folgenden Klasse, dividirt diese Zahl durch 20u, nimmt den Quotienten als dritte Ziffer der Wurzel, addirt ihn gleichzeitig zu 20u und multiplicirt diese Summe mit der 3. Ziffer der Wurzel u. s. w.

Beispiel.

$$\begin{array}{rl} \sqrt{20|79|36} & x = 4 \\ x^2 = 16 & \\ 20x = 80 \;|\,479 & y = 5 \\ (20x+y)y = 85 \cdot 5 = 425 & \\ 20u = 900 \;|\,5436 & z = 6 \\ (20u+z)z = 906 \cdot 6 = 5436 & \end{array}$$

x = 4, y = 5: also u = 45; also ist die Wurzel = 456.

Das Rechenschema, welches nach Weglassung der zum Verständniß nothwendigen Zuthaten bleibt, ist folgendes:

$$\begin{array}{rl} \sqrt{1|84|14|49} = 1357 & \\ 1 & \\ 23|8,4 & \\ 6\;9 & \\ 265|151,4 & \\ 132\;5 & \\ 2707|1894,9 & \\ 1894\;9 & \end{array}$$

Anmerkung. Da x, y, z..... Ziffern sind, so darf bei Bestimmung des u das y nie größer als 9 sein. Ebensowenig darf irgend einer der folgenden Quotienten diese Größe übersteigen.

§ 79 [§ 74] (Heis § 50. 51).

Quadratwurzeln aus Brüchen und Buchstabenpolynomien.

Da $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ist, so ist ein gewöhnlicher Bruch nur dann radicirbar, wenn sowohl sein Zähler als auch sein Nenner Quadratzahlen sind, und die Radicirung besteht dann darin, daß man nach § 78 aus Zähler und Nenner die Quadratwurzel zieht und die Quadratwurzel aus dem Zähler durch die aus dem Nenner dividirt.

Faßt man einen Decimalbruch als einen gewöhnlichen Bruch auf, dessen Zähler man erhält, wenn man das Decimalkomma wegläßt, dessen Nenner aber eine Potenz von 10 ist, so ist nach Vorstehendem erste Bedingung für die Radicirbarkeit eines Decimalbruches die, daß die Anzahl der Decimalstellen ohne etwaige Nullen am Ende (der Exponent der den Nenner bildenden Potenz) gerade ist. Wenn diese erste Bedingung erfüllt ist, so muß außerdem die durch Weglassung des Komma sich ergebende ganze Zahl ein Quadrat sein; ist auch dieses der Fall, so zieht man nach § 78 die Wurzel aus dieser Zahl und schneidet vom Resultate halb soviel Decimalstellen von rechts nach links ab, als der Radikand hatte.

Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man nach folgender Regel verfährt: Man theile den zu radicirenden Decimalbruch vom Komma aus nach rechts und links in Klassen zu je 2 Ziffern, berechne die Quadratwurzel nach den Regeln zur Berechnung der Quadratwurzel aus ganzen Zahlen und setze in der entstehenden Wurzel dann das Komma, wenn man in dem gegebenen Decimalbruche bis zum Komma gerechnet hat.

Beispiel:

```
√5,|54|13|16 = 2,354            √0,|01|69 = 0,13
 4                                0
 43|15,4                          ——
    12 9                          01
    ————                          1
 465|251,3                        ———
     232 5                        23|69
 4704|1881,6                         69.
      1881 6                         ——
      ——————
```

Soll man ein Buchstabenpolynomium radiciren, so ordnet man dasselbe zunächst nach einer Hauptgröße und sucht dann, wie oben, x, y, z, u. s. w. so zu bestimmen, daß das Polynomium

$$=(x+y+z\cdots)^2=x^2+2xy+y^2+2(x+y)z+z^2+\cdots$$
wird.

Beispiel. $\sqrt{16a^2+24ab-16ac+9b^2-12bc+4c^2}=\overset{x}{4a}+\overset{y}{3b}-\overset{z}{2c}$

$$\begin{array}{lllll}
 & 16a^2 & & & \\
2x = & 8a & \mid +24ab & & \\
2xy+y^2 = & & 24ab & +9b^2 & \\
2(x+y) = & 8a+6b & \mid -16ac & -12bc+4c^2 & \\
2(x+y)z+z^2 = & & -16ac & -12bc+4c^2. &
\end{array}$$

Zusatz. Zu den beiden gegebenen Zahlen a und b die mittlere Proportionale zu finden.

Aufl. Wenn die gesuchte mittlere Proportionale mit x bezeichnet wird, so daß sich verhält $a:x=x:b$, so ist $x^2=a\cdot b$, also $x=\sqrt{ab}$.

§ 80 [§ 75].

Die Quadratwurzeln aus nichtquadratischen Zahlen (ganzen Zahlen oder Decimalbrüchen) sind nach Früherem irrational, sie lassen sich daher nur angenähert berechnen. Wenn der Grad der Annäherung in der Weise bestimmt ist, daß der Fehler der Wurzel weniger als eine Einheit der x^{ten} Stelle betragen soll, so giebt man dem Radikanden durch Anhängen von Nullen 2x Decimalstellen, radicirt die so erhaltene Zahl nach § 79, wählt die letzte Ziffer so, daß der Rest möglichst klein wird (d. h. man erhöht die letzte berechnete Ziffer in der x^{ten} Stelle nöthigen Falls um 1) und unterdrückt dann diesen Rest. Ist der Radikand ein periodischer Decimalbruch, so hängt man keine Nullen an, sondern besetzt die fehlenden Stellen mit den Ziffern der Periode.

Ein gewöhnlicher Bruch, dessen Nenner kein Quadrat ist, wird vor der Ausziehung der Quadratwurzel in einen Decimalbruch mit der Stellenzahl 2x verwandelt und dann radicirt, um die schließliche Division mit einer Irrationalzahl zu vermeiden.

§ 81 [§ 78] (Heis § 52).

Aufgabe. Aus einer ganzen Zahl, welche ein vollständiger Cubus ist, die Cubikwurzel zu ziehen.

Lösung.

1) Der Cubus jeder einziffrigen Zahl ist ein-, zwei- oder dreiziffrig, da er zwischen $1^3=1$ und $10^3=1000$ liegen muß; also ist umgekehrt die Cubikwurzel aus einer 1-, 2- oder 3ziffrigen Zahl 1ziffrig. Man findet dieselbe mit Hülfe einer Tafel dieser Cuben.

2) Der Cubus jeder 2ziffrigen Zahl liegt zwischen den Cuben von 10

und 100, ist also 4=, 5= oder 6ziffrig, folglich ist umgekehrt die Cubikwurzel aus einer 4=, 5= oder 6ziffrigen Zahl 2ziffrig. Setzt man diese Erwägung fort, so erhält man die Regel, daß man die Anzahl der Ziffern der Cubikwurzel eines gegebenen Radikanden erhält, wenn man seine Ziffern von rechts nach links in Gruppen von je 3 Ziffern theilt und diese Gruppen zählt, wobei wieder die erste Gruppe links als voll gilt, wenn sie auch nur 1 oder 2 Ziffern enthält.

3) Die Cubikwurzel aus einer 4=, 5= oder 6ziffrigen Zahl ist 2ziffrig, hat also, wenn x und y die Ziffern sind, die Form $(10x + y)$; dem Begriffe der Cubikwurzel entsprechend muß demnach der Radikand $= (10x + y)^3 = x^3 \cdot 1000 + 3x^2y \cdot 100 + 3xy \cdot 10 + y^3$ sein, es muß also, wenn man diese Glieder successive in Abzug bringt, 0 als Rest bleiben. Man hat daher die größte Cubikzahl zu suchen, welche in der die erste Klasse bildenden Zahl enthalten ist, die Cubikwurzel aus dieser Zahl als erste Ziffer (x) der Wurzel zu nehmen und jene Cubikzahl von der ersten Klasse zu subtrahiren. Zieht man zu dem Reste die noch übrigen Ziffern des Radikandus herunter, so muß in der so entstehenden Zahl $300x^2y + 30xy^2 + y^3$ oder $(300x^2 + 30xy + y^2)y$ vollständig enthalten sein. Um die zweite Ziffer (y) der Wurzel zu finden, dividirt man die erhaltene Restzahl durch das dreihundertfache Quadrat der ersten Ziffer $(300x^2)$, wählt den Quotienten (der wieder nur einziffrig sein darf) als zweite Ziffer der Wurzel und addirt zu dem bisherigen Divisor das dreißigfache Produkt der ersten und zweiten Ziffer und das Quadrat der zweiten Ziffer der Wurzel; die so entstehende Summe wird mit der zweiten Ziffer der Wurzel multiplicirt und das Produkt von dem Dividendus subtrahirt; der Rest muß 0 sein.

Beispiel.

$$\begin{array}{rl} & \sqrt[3]{405|224} \qquad x = 7 \\ x^3 = & 343| \\ 300x^2 = 14700 & \;|\,62224 \qquad y = 4 \\ (300x^2+30xy+y^2)y = 15556.4 = & \;\;\underline{62224} \end{array}$$

die Wurzel ist also = 74.

4) Die Ausdehnung des Verfahrens zunächst auf 7=, 8= oder 9ziffrige Zahlen ist analog der oben für Quadratwurzeln gegebenen. Sie basirt darauf,

daß $(100x + 10y + z)^3 = \{10 \cdot (10x + y) + z\}^3 = (10u + z)^3$
$= u^3 \cdot 1000 + 3u^2z \cdot 100 + 3uz^2 \cdot 10 + z^3$ ist,

daß also auch hier erst u nach 3) für die beiden ersten Gruppen

möglichst genau zu bestimmen ist, dann z mit Hülfe der letzten Gruppe.

Beispiel.

$$\sqrt[3]{12|812|904}$$

$x^3 = 8$

$300x^2 = 1200|4812$

$(300x^2 + 30xy + y^2) \cdot y = 1389 \cdot 3 = 4167$

$300u^2 = 158700|645904$

$(300u^2 + 30uz + z^2) \cdot z = 161476 \cdot 4 = 645904$

$x = 2$, $y = 3$ } also $u = 23$; $z = 4$ } also ist die Wurzel $= 234$.

§ 82 [§ 79] (Heis § 52. 53).

Die Regeln für das Ausziehen der Cubikwurzeln aus solchen gewöhnlichen Brüchen und Decimalbrüchen, welche vollständige Cuben sind, aus Buchstabenpolynomien und aus solchen Radikanden, welche keine Cuben sind, sind ganz analog denen für das Quadratwurzelausziehen, nur muß stets daran gedacht werden, daß Dreitheilung an Stelle der Zweitheilung tritt.

Beispiel I. $\sqrt[3]{0,|140|608} = 0,52.$

125

$7500|\ 15608$

$(7500 + 300 + 4) \cdot 2 = 15608$

II. $\sqrt[3]{8a^9 - 12a^8 + 18a^7 - a^6 - 3a^5 + 12a^4 + a^3 + 3a + 1} = \overset{x}{2a^3} - \overset{y}{a^2} + \overset{z}{a} + \overset{u}{1}$

$8a^9$

$3x^2 = 12a^6 \quad | -12a^8 + 18a^7 - a^6$

$3x^2y + 3xy^2 + y^3 = -12a^8 + 6a^7 - a^6$

$3(x+y)^2 = (12a^6 - 12a^5 + 3a^4) \mid 12a^7 \quad -3a^5 + 12a^4 + a^3$

$3(x+y)^2 z = 12a^7 - 12a^6 + 3a^5$

$+12a^6 - 6a^5 + 12a^4 + a^3$

$3(x+y)z^2 + z^3 = +6a^5 - 3a^4 + a^3$

$3(x+y+z)^2 = (12a^6 - 12a^5 + 15a^4 - 6a^3 + 3a^2) \mid 12a^6 - 12a^5 + 15a^4 \quad + 3a + 1$

$3(x+y+z)^2 \cdot u = 12a^6 - 12a^5 + 15a^4 - 6a^3 + 3a^2$

$+6a^3 - 3a^2 + 3a + 1$

$3(x+y+z)u^2 + u^3 = 6a^3 - 3a^2 + 3a + 1$

D. Rechnungen mit irrationalen Wurzeln, besonders Quadratwurzeln. (Heis § 42. 43.)

§ 83 [§ 76].

a) Sind die Glieder einer algebraischen Summe Wurzeln aus verschiedenen Radikanden, so kann man dieselbe im Allgemeinen nicht weiter vereinfachen. Bisweilen ist es jedoch möglich, die Radikanden als Produkte oder Quotienten ein und desselben nicht radicirbaren Factors und anderer radicirbarer Factoren darzustellen und

dann durch theilweise Radicirung mit Hülfe der Formeln $\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ und $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ die Glieder der gegebenen algebraischen Summe so umzuformen, daß mehrere oder alle Glieder dieselbe Wurzel aus demselben nicht radicirbaren Radikanden als Factor enthalten. In diesem Falle kann man schließlich die gemeinschaftliche Wurzel nach früheren Regeln als Factor absondern, z. B.

1) $2\sqrt{8}-7\sqrt{18}+5\sqrt{72}-\sqrt{50}+2\sqrt{242}$
$=2\sqrt{4\cdot 2}-7\sqrt{9\cdot 2}+5\sqrt{36\cdot 2}-\sqrt{25\cdot 2}+2\sqrt{121\cdot 2}$
$=2\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}-7\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}+5\sqrt{36}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}+2\sqrt{121}\cdot\sqrt{2}$
$=4\sqrt{2}-21\sqrt{2}+30\sqrt{2}-5\sqrt{2}+22\sqrt{2}$
$=(4-21+30-5+22)\sqrt{2}=30\sqrt{2}$

2) $6a\sqrt{63ab^3}-3\sqrt{112a^3b^3}+2ab\sqrt{343ab}-5b\sqrt{28a^3b}$.
$=6a\sqrt{9b^2\cdot 7ab}-3\sqrt{16a^2b^2\cdot 7ab}+2ab\sqrt{49\cdot 7ab}-5b\sqrt{4a^2\cdot 7ab}$
$=6a\cdot 3b\sqrt{7ab}-3\cdot 4ab\sqrt{7ab}+2ab\cdot 7\sqrt{7ab}-5b\cdot 2a\sqrt{7ab}$
$=(18ab-12ab+14ab-10ab)\sqrt{7ab}$
$=10ab\sqrt{7ab}$.

3) $\sqrt{\frac{a^3x}{b^3}}-\sqrt{\frac{ax^5}{b^5}}+\sqrt{\frac{x^3}{ab}}=\sqrt{\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{ax}{b}}-\sqrt{\frac{x^4}{b^4}\cdot\frac{ax}{b}}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{ax}{b}}$
$=\frac{a}{b}\sqrt{\frac{ax}{b}}-\frac{x^2}{b^2}\sqrt{\frac{ax}{b}}+\frac{x}{a}\sqrt{\frac{ax}{b}}=\left(\frac{a}{b}-\frac{x^2}{b^2}+\frac{x}{a}\right)\sqrt{\frac{ax}{b}}$

4) $\sqrt[m]{2^m a^{mp+3} b^{mn+5}}+\sqrt[m]{3^m a^{2m-mn+3} b^{m+5}}-\sqrt[m]{a^3b^5c^{2m}}=$
$2a^pb^n\sqrt[m]{a^3b^5}+3a^{2-n}b\sqrt[m]{a^3b^5}-c^2\sqrt[m]{a^3b^5}=(2a^pb^n+3a^{2-n}b-c^2)\sqrt[m]{a^3b^5}$.

b) Hat man algebraische Summen, deren Glieder gleichvielte Wurzeln sind, zu multipliciren, so führt man zunächst die Multiplikation nach den für algebraische Summen geltenden Regeln und mit Hülfe der Formel $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ aus und vereinfacht schließlich, wenn möglich, das Resultat in der Weise, wie es in a) erörtert ist, z. B. bei Quadratwurzeln

$(\sqrt{12}-2\sqrt{7})(2+\sqrt{21})=2\sqrt{12}-4\sqrt{7}+\sqrt{12\cdot 21}-2\sqrt{7\cdot 21}$
$=2\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}-4\sqrt{7}+\sqrt{4\cdot 9\cdot 7}-2\sqrt{7\cdot 7\cdot 3}$
$=4\sqrt{3}-4\sqrt{7}+6\sqrt{7}-14\sqrt{3}=2\sqrt{7}-10\sqrt{3}$.

Anmerkung. Ebenso verfährt man, wenn man eine solche algebraische Summe ins Quadrat erheben soll.

c) Wenn aber die Glieder der zu multiplicirenden algebraischen Sum-

men nicht gleichvielte Wurzeln enthalten, so müssen, ehe die Multiplikation der einzelnen Glieder ausgeführt wird, die Wurzelfactoren je zweier solcher Glieder unter Anwendung von § 75,9 so umgeformt werden, daß ihre Wurzelexponenten gleich sind. Dann kommt die Regel in b) zur Anwendung.

Beispiel. $(\sqrt{a}+\sqrt[3]{ax^2})(\sqrt{x}+\sqrt[3]{a^2x}) = \sqrt{ax}+x\sqrt[6]{a^2x}+a\sqrt[6]{ax^2}+ax.$

d) Enthält der Nenner eines Bruches irrationale Quadratwurzeln, so schafft man diese fort, um die Division mit einer Irrationalzahl zu vermeiden. Dieses sogenannte Rationalmachen des Nenners eines Bruches wird bei eingliedrigem Nenner erreicht, wenn man den Radikandus so erweitert, daß der Nenner ein Quadrat, also radicirbar wird, z. B.

$$\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2};\quad \sqrt{\frac{15}{8}}=\sqrt{\frac{30}{16}}=\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{16}}=\frac{1}{4}\sqrt{30}.$$

In derselben Weise macht man den Nenner eines Bruches auch dann leicht rational, wenn er eingliedrig ist und höhere Wurzeln als Quadratwurzeln enthält, z. B.

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\sqrt[3]{\frac{ab^2}{b^3}}=\frac{1}{b}\sqrt[3]{ab^2};\quad \frac{6ax}{5\sqrt[4]{3x^3}}=\frac{6ax\sqrt[4]{27x}}{5\sqrt[4]{81x^4}}=\frac{2}{5}\,a\sqrt[4]{27x}.$$

Wenn aber der Nenner eine zweigliedrige Summe oder Differenz von Quadratwurzeln ist, so multiplicirt man Zähler und Nenner mit der Differenz oder Summe derselben Glieder und erhält so im Nenner $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$.

Beispiel.

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-2\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+2\sqrt{2})(\sqrt{6}-2\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{12}-4+\sqrt{18}-2\sqrt{6}}{6-8}$$

$$=\frac{4-2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{2}=2-\sqrt{3}-\frac{3}{2}\sqrt{2}+\sqrt{6}.$$

oder $$\frac{Z}{m\sqrt{a}-n\sqrt{b}}=\frac{Z(m\sqrt{a}+n\sqrt{b})}{(m\sqrt{a}-n\sqrt{b})(m\sqrt{a}+n\sqrt{b})}=\frac{Z(m\sqrt{a}+n\sqrt{b})}{am^2-bn^2}.$$

Ist der Nenner eine drei- oder viergliedrige algebraische Summe von Quadratwurzeln, so ist er zunächst als zweigliedrig zu betrachten und dann ist das eben auseinandergesetzte Verfahren wiederholt anzuwenden. Bei mehrgliedrigeren Nennern ist das Verfahren erfolglos. Sind andere Wurzeln als Quadratwurzeln im Nenner enthalten, so lassen sich allgemeine Regeln behufs Rationalmachen des Nenners nicht aufstellen.

Beispiel.

$$\frac{\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}(1+2\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(1+2\sqrt{2})^2-5}=\frac{\sqrt{2}+4+\sqrt{10}}{1+4\sqrt{2}+8-5}=\frac{\sqrt{2}+4+\sqrt{10}}{4\sqrt{2}+4}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}+4+\sqrt{10})(4\sqrt{2}-4)}{(4\sqrt{2}+4)(4\sqrt{2}-4)}=\frac{-8+12\sqrt{2}-4\sqrt{10}-8\sqrt{5}}{32-16}=\frac{4(3\sqrt{2}-2-\sqrt{10}+2\sqrt{5})}{16}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}-2-\sqrt{10}+2\sqrt{5}}{4}$$

oder

$$\frac{Z}{m\sqrt{a}+n\sqrt{b}+p\sqrt{c}}=\frac{Z(m\sqrt{a}+n\sqrt{b}-p\sqrt{c})}{am^2+bn^2-cp^2+2mn\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{Z(m\sqrt{a}+n\sqrt{b}-p\sqrt{c})(am^2+bn^2-cp^2-2mn\sqrt{ab})}{(am^2+bn^2-cp^2)^2-4abm^2n^2}.$$

Anmerkung. Nach den vorstehenden Regeln wird auch die Division zweier Formeln, deren Glieder irrationale Quadratwurzeln enthalten, ausgeführt. Man schreibe die Aufgabe in Bruchform und mache den Nenner rational.

E. Imaginäre Wurzeln, besonders Quadratwurzeln und complexe Zahlen. (Heis § 49.)

§ 84 [§ 77].

Zufolge § 75,10 Zusatz ist jede gerade Wurzel aus einer negativen Zahl imaginär. Man schließt aber solche imaginären Größen von der Rechnung nicht aus, weil in vielen Fällen sich bei Fortsetzung der Rechnung ein reelles Resultat ergiebt.

Eine besondere Berücksichtigung unter den imaginären Wurzeln verdienen nur die Quadratwurzeln; alle anderen lassen sich nämlich auf imaginäre Quadratwurzeln zurückführen.

Für $\sqrt{-a}$ schreibt man, da es $=\sqrt{a\cdot(-1)}$ ist, stets $\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}$ oder, indem man für $\sqrt{-1}$ den Buchstaben i setzt, dem man das doppelte Vorzeichen vorsetzt, da $\sqrt{-1}$ doppeldeutig ist (vergl. § 75,10)

$$\sqrt{-a}=\pm i\sqrt{a}.$$

Da $i=\pm\sqrt{-1}$, so ist $i^2=-1$, ferner $i^3=\mp\sqrt{-1}$ und $i^4=+1$.

Lehrsatz. Die Produkte oder Quotienten zweier imaginären Größen sind reell, aber die Produkte oder Quotienten einer reellen und einer imaginären Größe sind imaginär.

Beweis. $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}$ ist $=i^2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ und

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=\frac{i\sqrt{a}}{i\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Aber $\sqrt{a}\cdot\sqrt{-b}$ ist $= i\sqrt{ab}$ und $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}} = \frac{i\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = i\sqrt{\frac{a}{b}}$. Und endlich ist $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{a}}{i\sqrt{b}} = \frac{i\sqrt{a}}{i^2\sqrt{b}} = -i\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Dem entsprechend sind die geraden Potenzen imaginärer Größen reell, die ungeraden Potenzen aber imaginär. $(\sqrt{-a})^{4n} = (i\sqrt{a})^{4n} = a^{2n}$ und $(\sqrt{-a})^{4n+2} = (i\sqrt{a})^{4n+2} = -a^{2n+1}$, aber $(\sqrt{-a})^{4n+1} = (i\sqrt{a})^{4n+1} = i\sqrt{a^{4n+1}} = i\cdot a^{2n}\sqrt{a}$ und $(\sqrt{-a})^{4n+3}$
$= (i\sqrt{a})^{4n+3} = -i\cdot a^{2n+1}\sqrt{a}$.

Anmerkung. Die Addition oder Subtraction von imaginären Größen wird ausgeführt, indem man die Summe oder Differenz der reellen Factoren mit dem gemeinsamen imaginären Factor i multiplicirt.

Beispiel I. $(\sqrt{-2}+\sqrt{-5})(\sqrt{-8}+\sqrt{-5}) = (i\sqrt{2}+i\sqrt{5})(i\sqrt{8}+i\sqrt{5})$
$= -4-\sqrt{10}-2\sqrt{10}-5 = -9-3\sqrt{10}$.

II. $8:(2+\sqrt{-3}) = \frac{8(2-i\sqrt{3})}{4-i^2\cdot 3} = \frac{16-8i\sqrt{3}}{4+3} = \frac{16-8i\sqrt{3}}{7}$.

§ 85.

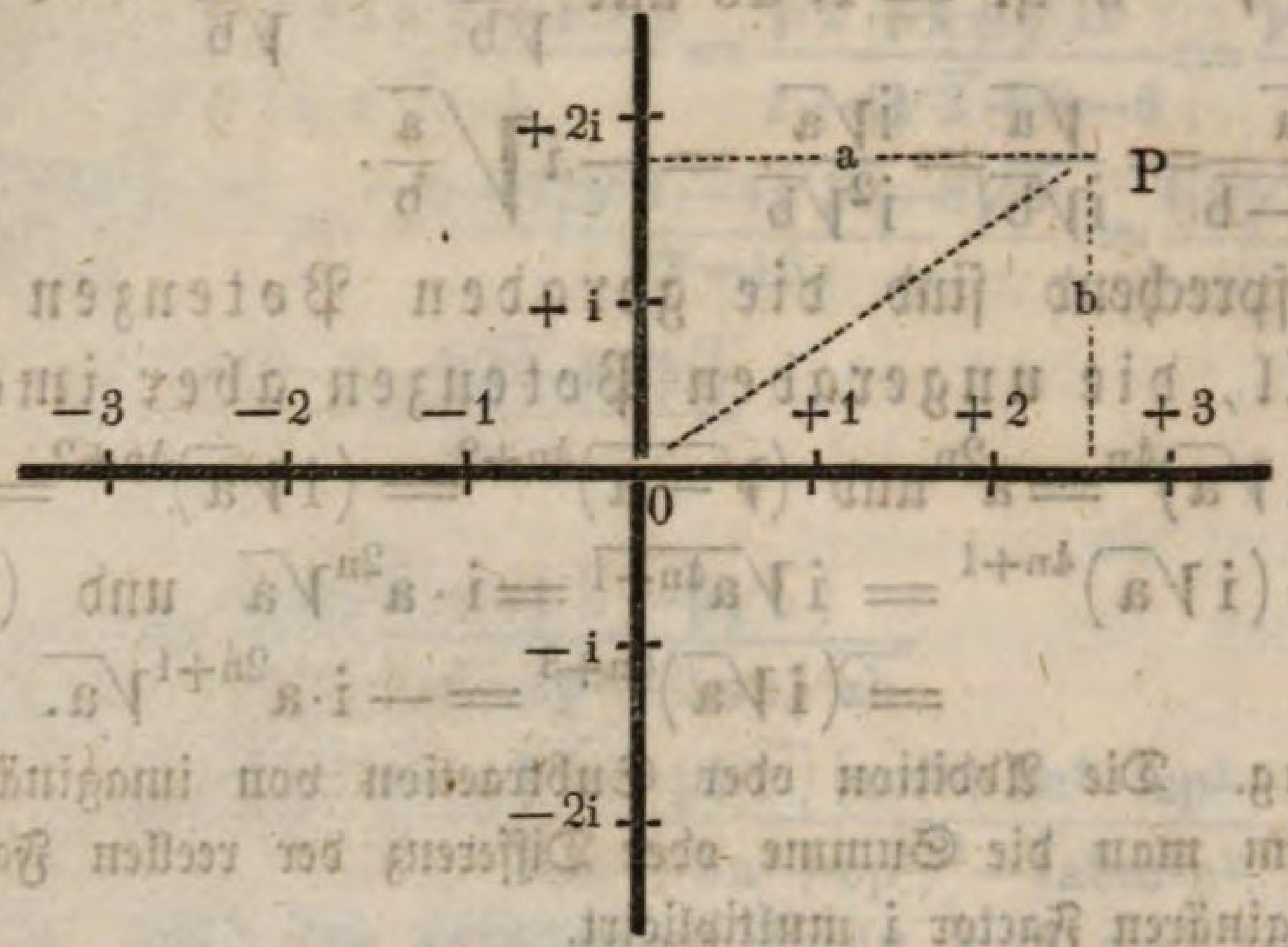
Complexe Zahlen.

Die algebraische Summe einer reellen und einer imaginären Größe nennt man eine complexe Zahl. Die allgemeine Form der complexen Zahlen ist demnach $a+bi$, wobei a und b reelle algebraische Zahlen sein sollen.

Die complexe Form $a+bi$ umfaßt alle Zahlen, da aus ihr sowohl die reellen Zahlen (wenn b verschwindet), als auch die rein imaginären Zahlen (wenn $a=0$ ist) hervorgehen.

Wie durch die Figur 1 im § 30 zunächst die reellen, positiven und negativen, ganzen Zahlen, und durch Fig. 5 im § 42 die reellen Brüche, sowie durch Erweiterung dieser Figur im § 77 die irrationalen reellen Zahlen dargestellt worden sind, so kann man auch die imaginären und die complexen Größen durch eine Figur zur Anschauung bringen. Man zieht wie in Figur 6 geschehen ist, durch den Nullpunkt eine Vertikallinie und trägt nach beiden Seiten hin vom Nullpunkte aus die Längeneinheit mehrmals ab. Die Theilungspunkte sind dann die Bilder der imaginären ganzen Zahlen, zwischen denen die Bilder der imaginären Brüche liegen; zwischen diesen liegen die Bilder der imaginären irrationalen Zahlen. — Endlich ist der Punkt P in der Ebene der Figur, welcher von der horizontalen Linie um b Längeneinheiten und von der vertikalen Linie um a Längeneinheiten entfernt

Fig. 6.



ist, das Bild der complexen Zahl $a+bi$. Die Bilder der complexen Zahlen erfüllen demnach die ganze, durch die horizontale und die vertikale Linie gelegte Ebene.

Zwei complexe Zahlen heißen gleich, wenn sowohl ihre reellen Theile unter einander gleich sind, als auch ihre imaginären Theile unter einander.

Die durch Rechnungen mit complexen Größen entstehenden Resultate ordnet man so, daß sie aus einem reellen und einem imaginären Gliede bestehen. Deshalb werden

zwei complexe Zahlen addirt oder subtrahirt, indem man ihre reellen Theile addirt oder subtrahirt und ihre imaginären Theile addirt oder subtrahirt und die erhaltenen Summen oder Differenzen durch das plus-Zeichen verbindet (wobei man die vor den imaginären Theilen stehenden Factoren als algebraische Zahlen anzusehen hat):

$$(a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm d)i.$$

Zwei complexe Zahlen werden multiplicirt, indem man sie wie zwei Binome multiplicirt und dabei die imaginäre Einheit i als Factor betrachtet:

$$(a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd) + i\,(ad+bc).$$

Bei der Division mit complexen Größen macht man zuvor den Nenner rational und dividirt dann Glied für Glied:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Auch die Quadratwurzel aus einer complexen Größe läßt sich auf die Form einer complexen Größe bringen. Es ist nämlich $a+bi$ identisch gleich

$$a + bi = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} + 2\sqrt{\frac{(a+\sqrt{a^2+b^2})(a-\sqrt{a^2+b^2})}{4}} + \frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

$$= \left(\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} + \frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^2.$$ Deshalb ist

$$\sqrt{a+bi} = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

VII. Kapitel.

Von den Logarithmen. (Heis § 56—59.)

§ 86 [§ 80].

Das Logarithmiren ist die zweite Umkehrung des Potenzirens, insofern durch diese neue Rechenoperation aus dem Werthe einer Potenz und der zugehörigen Grundzahl der Potenzexponent ermittelt werden soll. Die gegebene Potenz heißt hier der Logarithmandus oder die Zahl schlechthin (der numerus), die Grundzahl oder Basis der Potenz behält ihren Namen, der gesuchte Potenzexponent aber wird der Logarithmus der Zahl (des numerus) genannt und mit log. oder mit l. bezeichnet.

Der Logarithmus der Zahl (des numerus) a in Bezug auf die Basis g ist also der Potenzexponent c, mit welchem g potenzirt, a giebt, d. h. numerus = Basis$^{\text{logarithmus des numerus}}$, oder wenn

$$a = g^c \text{ ist, so ist } c = \log a_{\text{bas } g}.$$

Die Grundgleichung der Lehre von den Logarithmen ist demnach

$$a = g^{\log a}.$$

Ein Logarithmensystem ist die Zusammenstellung der Logarithmen aller natürlichen Zahlen für dieselbe Grundzahl. Zur Grundzahl eines Systems geeignet ist jede positive Zahl außer 1, 0 und ∞. Denn alle Potenzen von 1 sind gleich 1; die Potenzen von 0 sind entweder $= 0$ oder $= \infty$ oder $= 1$, und die Potenzen von ∞ sind entweder $= \infty$ oder $= 0$ oder $= 1$. Ebenso wenig ist eine negative Zahl als Basis eines Logarithmensystems denkbar, da ihre Potenzen theilweis imaginär sind. — Es sind daher zwar unendlich viele Logarithmensysteme denkbar; in Gebrauch sind aber nur zwei; das eine, das sogenannte gemeine oder Brigg'sche System (Brigg 1618), hat zur Grundzahl 10, welche sich als Grundzahl unseres ganzen Zahlensystems vorzugsweise eignet, das andere das sogenannte natürliche oder Neper'sche (Lord Neper

1614) hat zur Grundzahl die Irrationalzahl $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots = 2,7182818 \cdots$ Die ersteren Logarithmen bezeichnet man schlechthin mit log oder mit log. vulg., die letzteren mit log. nat. oder mit l.

§ 87 [§ 81. 82]. Lehrsätze.

In jedem System ist:

1) Der Logarithmus der Grundzahl = 1, da die Basis nur in der ersten Potenz sich selbst gleich ist;

2) Der Logarithmus der $1 = 0$, da nur die 0^{te} Potenz jeder Basis 1 ist;

3) Der Logarithmus von $0 = -\infty$, da $a^{-\infty} = \frac{1}{a^{\infty}} = 0$ ist;

4) Der Logarithmus einer negativen Zahl imaginär, da keine reelle Potenz einer positiven Zahl negativ sein kann.

Zusatz. Ist die Grundzahl > 1, so gehört zur größern Zahl ein größerer Logarithmus, da in diesem Falle Gleiches mit Größerem potenzirt werden muß, um Größeres zu erhalten. (§ 64.)

5) Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der Factoren, also

$$\log ab_{bas\,\alpha} = \lg a_{bas\,\alpha} + \lg b_{bas\,\alpha}$$

und ebenso $\lg abc = \lg a + \lg b + \lg c$.

Beweis. Setze ich $\log a_\alpha = x$, so ist $\alpha^x = a$,

und $\log b_\alpha = y$, so ist $\alpha^y = b$.

$$ab = \alpha^x \cdot \alpha^y = \alpha^{x+y}$$

$$x + y = \lg ab_\alpha, \text{ d. h. } \log a_\alpha + \log b_\alpha = \lg ab_\alpha.$$

6) Der Logarithmus eines Quotienten (Bruches) ist gleich der Differenz der Logarithmen des Dividendus (Zählers) und des Divisors (Nenners), also

$$\lg \left(\frac{a}{b}\right)_\alpha = \lg a_\alpha - \lg b_\alpha.$$

Beweis wie in 1.

Zusatz. Für jede Basis > 1 sind also die Logarithmen der echten Brüche negativ und zwar stets gleich dem negativen Logarithmus des umgekehrten Bruches, also die Logarithmen der Stammbrüche gleich den negativen Logarithmen der Nenner.

7) Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Logarith-

mus des Dignanden, multiplicirt mit dem Exponenten, also

$$\lg a_{\alpha}^{m} = m \lg a_{\alpha}.$$

Beweis aus 5) mit Hülfe der Bedeutung von a^m.

8) Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Logarithmus des Radikanden, dividirt durch den Wurzelexponenten, also

$$\lg \sqrt[m]{a_{\alpha}} = \frac{\lg a_{\alpha}}{m} = \frac{1}{m} \cdot \log a_{\alpha}.$$

Beweis aus 7), da $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$ ist.

Anhang. Vorstehende Sätze gewähren das Mittel, weitläufige Multiplikations- und Divisionsaufgaben, sowie Potenzirungen und Radicirungen wesentlich zu erleichtern, indem man zunächst mit den Logarithmen der Zahlen rechnet.

Anmerkung. Zu einer Summe oder einer Differenz läßt sich der Logarithmus nicht eher finden, bis der Ausdruck eingliedrig ist.

§ 88 [§ 83].

Das Brigg'sche System.

1) Da die Basis des Systems 10 ist, so ist log 10 = 1, log 100 = 2, log 1000 = 3 u. s. w., und lg 1 = 0, d. h. die Logarithmen der Potenzen von 10 mit positiven ganzen Exponenten und mit dem Exponenten 0 sind ganze Zahlen. Die Logarithmen aller Zahlen zwischen 1 und 10, 10 und 100, 100 und 1000 u. s. w. liegen demnach zwischen 0 und 1, 1 und 2, 2 und 3 u. s. w. und sind irrational, da der Logarithmand keine Potenz von 10 ist. Ihre Näherungswerthe werden in größeren Logarithmentafeln bis auf 7, in kleineren bis auf 5 Stellen genau angegeben; jeder derselben besteht aus 2 Theilen, nämlich aus den Ganzen, der sogenannten Kennziffer oder Charakteristik, und aus dem echten Decimalbruche, der sogenannten Mantisse.

2) Die Kennziffer des Logarithmus eines numerus, welcher größer als 1 ist, ist stets um 1 kleiner als die Anzahl der Ziffern vor dem Komma des numerus. Denn eine Zahl, welche m Ziffern vor dem Komma hat, liegt zwischen 10^{m-1} und 10^m, ihr Logarithmus also zwischen den gan-

zen Zahlen m — 1 und m, d. h. die Kennziffer des Logarithmus ist m — 1.

3) Die Logarithmen aller numeri, welche größer als 1 sind und sich nur durch die Stellung des Komma von einander unterscheiden, haben dieselbe Mantisse. — Denn der Quotient zweier solchen Zahlen ist irgend eine ganze Potenz von 10, der Logarithmus des Quotienten also eine ganze Zahl. Die Logarithmen der beiden numeri unterscheiden sich daher um eine ganze Zahl, d. h. sie stimmen in ihren Kennziffern überein.

4) Der Logarithmus eines echten Decimalbruches hat dieselbe Mantisse, wie die Logarithmen derjenigen unechten Decimalbrüche oder ganzen Zahlen, welche sich von ihm nur durch die Stellung des Komma unterscheiden. Seine Kennziffer aber ist negativ und gleich der Anzahl Nullen, welche zum Schreiben des Decimalbruches erforderlich sind. — Denn jeden echten Decimalbruch kann man als einen Quotienten darstellen, dessen Dividendus derjenige unechte Decimalbruch zwischen 1 und 10 ist, welcher von dem gegebenen echten Decimalbruche sich nur durch die Stellung des Komma unterscheidet, und dessen Divisor die sovielte Potenz von 10 ist, als Nullen vor den geltenden Ziffern des gegebenen echten Decimalbruches, einschließlich der Null vor dem Komma, stehen. Der Logarithmus des gegebenen echten Decimalbruches erhält also die Form einer Differenz, deren Minuendus (die Mantisse) der Logarithmus jenes unechten Decimalbruches zwischen 1 und 10 ist, und deren Subtrahendus (die Charakteristik) der Logarithmus der sovielten Potenz von 10 ist, als Nullen zum Schreiben des gegebenen echten Decimalbruches erforderlich sind. — Man pflegt die Subtraction nicht auszuführen, und solche Logarithmen halbnegative zu nennen. Die Kennziffer bleibt stets hinter dem die Mantisse bildenden echten Decimalbruche stehen, z. B.

$$\log 0{,}5 = \log 5 - \log 10 = 0{,}69897 - 1.$$

5) Wenn zu einem gegebenen Logarithmus der zugehörige numerus zu suchen ist, so hat man demnach zunächst nur die Mantisse zu berücksichtigen und daraus die Ziffern des numerus zu bestimmen. Ist die Charakteristik des Logarithmus 0 oder eine positive Zahl, so ist der numerus eine Zahl > 1 und hat eine Ziffer mehr vor dem

Komma, als die Charakteristik Einheiten enthält. Wenn aber die Charakteristik negativ ist, so ist der numerus ein echter Decimalbruch; den aus der Mantisse ermittelten Ziffern sind dann soviele Nullen (einschließlich der Null vor dem Komma) vorzusetzen, als die Charakteristik negative Einheiten enthält.

6) Ganz negative Logarithmen, d. h. solche, in denen auch die Mantisse negativ ist, vermeidet man in der Rechnung, indem man sie durch halbnegative ersetzt. Zu diesem Zwecke subtrahirt man den absoluten Werth des betreffenden Logarithmus von der nächst höheren ganzen Zahl und fügt dem erhaltenen positiven Resultate diese ganze Zahl als negative Charakteristik bei.

7) Mit halb negativen Logarithmen rechnet man, wie man überhaupt mit Differenzen rechnet. Bei der Subtraction vermeidet man jedoch, daß schließlich die Mantisse der Differenz negativ wird, indem man den Minuendus durch Addiren einer ganzen Zahl passend vergrößert und ihm gleichzeitig diese ganze Zahl als negative Charakteristik beifügt oder seine schon vorhandene negative Charakteristik um dieselbe Zahl vergrößert. Bei der Division in einen halbnegativen Logarithmus vermeidet man eine gebrochene negative Charakteristik, indem man ähnlich, wie im Vorstehenden, durch Addition zu Minuendus und Subtrahendus die negative Charakteristik dividirbar macht. Soll durch einen halbnegativen Logarithmus dividirt werden, so muß man, da man durch eine Differenz nicht dividiren kann, denselben durch einen ganz negativen ersetzen.

8) Bei der Berechnung negativer oder imaginärer Zahlausdrücke durch Logarithmen hat man im ersteren Falle den Factor (—1), im anderen i abzusondern, das noch übrig bleibende positive und reelle Produkt logarithmisch zu berechnen und dem gewonnenen Resultate den Factor (— 1), bezüglich i wieder hinzuzufügen.

Anmerkung. Die Einrichtung und der Gebrauch der Logarithmentafeln ist in diesen selbst erläutert.

§ 89 [§ 84].

Berechnung complicirter Zahlenausdrücke durch die Logarithmen.

Diese Anwendung mag durch folgendes Beispiel erörtert werden, welches in der Form seiner Ausführung allen ähnlichen Rechnungen als Muster dient:

$$\frac{\sqrt[5]{2,371^3 \cdot 0,043^4}}{0,3918069} = x.$$

$$\log x = \frac{1}{5}\lg (2{,}371^3 \cdot 0{,}043^4) - \lg 0{,}3918069$$

$$= \frac{1}{5}(3 \cdot \lg 2{,}371 + 4 \cdot \lg 0{,}043) - \lg 0{,}3918069$$

$$\lg 2{,}371 = 0{,}3749316;\quad 3 \cdot \lg 2{,}371 = 1{,}1247948$$

$$\lg 0{,}043 = 0{,}6334685 - 2;\quad 4 \cdot \lg 0{,}043 = 0{,}5338740 - 6.$$

$$\text{Sa.} = 0{,}6586688 - 5.$$

$$\frac{1}{5}(3 \cdot \lg 2{,}371 + 4 \cdot \lg 0{,}043) = (0{,}6586688 - 5):5 = 0{,}1317338 - 1$$

$$= 1{,}1317338 - 2$$

$$\left.\begin{array}{r} \lg 0{,}3918069 = 0{,}5930644-1 \\ 67 \\ 10 \\ \hline 721 \end{array}\right\} = 0{,}5930721$$

$$\log x = 0{,}5386617 - 1$$

$$x = 0{,}34567$$

§ 90. Aufgabe.

Den Logarithmus einer gegebenen Zahl, z. B. von 2, durch Annäherung zu berechnen.

Aufl. Der gesuchte log 2 sei x; dann ist

$10^x = 2$, d. h. es muß sein $0 < x < 1$;

$10^{2x} = 4$, „ „ „ „ $0 < x < 1/2$;

$10^{4x} = 16$, „ „ „ „ $\frac{1}{4} < x < 1/2$ oder $0{,}25 < x < 0{,}5$

$10^{8x} = 256$, „ „ „ „ $\frac{2}{8} < x < 3/8$ „ $0{,}25 < x < 0{,}375$

u. s. w.

Indem man die hier angedeutete Methode fortsetzt, kann man den gesuchten Logarithmus bis zu jedem beliebigen Grade von Genauigkeit ermitteln.

§ 91. Aufgabe.

Den Logarithmus der Zahl a, bezogen auf die Basis α, zu finden, wenn der Logarithmus dieser Zahl a, bezogen auf die Basis β, gegeben ist.

Aufl. Wird der gesuchte $\log a_\alpha$ mit x bezeichnet, so ist $a = \alpha^x$. Nimmt man beiderseits die Logarithmen in Bezug auf die Basis β, so ist

$\log a_\beta = \log (\alpha^x)_\beta = x \cdot \log \alpha_\beta$. Daraus folgt

$$x = \log a_\alpha = \frac{\log a_\beta}{\log \alpha_\beta}.$$

Zusatz. Der Bruch $\frac{1}{\log \alpha_\beta}$, mit welchem der gegebene Logarithmus der Zahl a, bezogen auf die Basis β, zu multipliciren ist, um den Logarithmus der Zahl a, bezogen auf die Basis α, zu finden, heißt der Modulus des neuen Logarithmensystems. Beispielsweise ist

$$\text{l. a} = \frac{\log a}{\log e} \text{ und } \log a = \frac{\text{l. a}}{\text{l. 10}}.$$

$\frac{1}{\text{l. 10}} = 0{,}4342945$ ist der Modulus des Brigg'schen Systems.

VIII. Kapitel.

Von den Gleichungen.

§ 92 [§ 85] (Heis § 60).

Eine Gleichung ist die Verbindung zweier gleichen Größenausdrücke durch das Gleichheitszeichen. Die Gleichungen werden eingetheilt in identische, analytische und Bedingungs- oder Bestimmungs-Gleichungen. In den identischen Gleichungen steht auf beiden Seiten dasselbe (idem), z. B. $a + x = a + x$, $(a + m)x = (a + m)x$; in den analytischen Gleichungen ist die eine Seite nur eine andere Form, eine Entwickelung (analysis) der anderen, z. B. $(a + b)x = ax + bx$, $(a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$; in beiden also ist die Gleichheit der Seiten eine unbedingte, sie findet für alle Specialwerthe der in den Ausdrücken vorkommenden Größen statt. Beispiele für die analytischen Gleichungen liefern die Formeln aller bisher bewiesenen Lehrsätze. In den Bedingungs-Gleichungen, welche schlechthin Gleichungen genannt werden, sind die beiden Seiten nur bedingungsweise für gewisse Specialwerthe einzelner Größen gleich, z. B. $x + 3 = 8$ nur für $x = 5$, $5x = 45$ nur für $x = 9$.

Hieraus folgt von selbst, daß in einer solchen Gleichung mindestens Eine unbestimmte Zahl vorkommen muß. Diese Zahl, deren Werth durch die übrigen bestimmten Zahlen so zu berechnen ist, daß die Bedingung der Gleichheit erfüllt wird, heißt die unbekannte Größe und wird gewöhnlich durch einen der letzten Buchstaben des Alphabetes (x, y, z) bezeichnet. Für die übrigen, in der Gleichung etwa enthaltenen Buchstabengrößen, deren Werthe als bekannt angesehen werden sollen, pflegt man die ersten Buchstaben des Alphabetes zu wählen. Derjenige Werth der unbekannten Größe, welcher der Bedingung der Gleichheit genügt, die beiden Seiten also bedingungslos gleich macht,

heißt die Wurzel der Gleichung, und das Auffinden dieses Werthes wird Auflösen der Gleichung genannt.

Die Bestimmungs-Gleichungen führen, wenn die unbekannte Größe mit den bekannten durch die 4 Species verbunden ist, oder wenn sie als Dignand einer Potenz, oder als Radikand einer Wurzel vorkommt, den Namen algebraische Gleichungen; in allen übrigen Fällen, besonders dann, wenn die Unbekannte sich als Exponent findet, heißen sie transscendent. Letztere bleiben von der Betrachtung ausgeschlossen.

§ 93 [§ 86].

Algebraische Gleichungen.

Da gleiche Rechnungsoperationen, mit gleichen Größen vorgenommen, gleiche Resultate geben, so kann man aus einer gegebenen Gleichung verschiedene andere mit ihr identische Gleichungen herleiten, wenn man beide Seiten, als Ganze betrachtet, denselben Rechnungsoperationen unterwirft.

Im Einzelnen folgt hieraus:

1) Gleiche Glieder, welche mit gleichem Vorzeichen auf verschiedenen Seiten stehen, können auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens subtrahirt, also einfach fortgelassen werden.

2) Jedes Glied der einen Seite läßt sich mit entgegengesetztem Vorzeichen auf die andere Seite bringen (transponiren), indem es auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens subtrahirt wird. Wenn die gleichnamigen Glieder, d. h. die Glieder, welche dieselben Unbekannten in derselben Potenz enthalten, zu einem Gliede vereinigt, und dann alle Glieder auf die eine Seite gebracht sind, so daß auf der anderen nur Null bleibt, so sagt man, die Gleichung sei auf Null reducirt.

Anmerkung. Hieraus folgt, daß eine Gleichung ihrem Wesen nach sich nicht ändert, wenn man die Vorzeichen aller Glieder auf beiden Seiten gleichzeitig umkehrt.

3) Ehe man jedoch die unter 1) und 2) erwähnten Vereinfachungen und Reductionen vornehmen kann, muß man nöthigen Falls die Gleichung von denjenigen Klammern, Nennern und Wurzeln, in denen die Unbekannte vorkommt, befreien.

Die soeben angeführten Umformungen und Reductionen einer algebraischen Gleichung bezeichnet man mit dem gemeinsamen Namen: Ordnen der Gleichung. Durch Anwendung des Vorstehenden läßt sich jede algebraische Gleichung auf eine der Formen

$$ax + b = 0 \text{ oder } ax = c,$$
$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ oder } ax^2 + bx = d,$$
$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \text{ oder } ax^3 + bx^2 + cx = e,$$
u. s. w.,
$$\text{oder } ax + by + c = 0 \text{ oder } ax + by = d,$$
$$ax + by + cz + d = 0 \text{ oder } ax + by + cz = e,$$
u. s. w.

bringen, worin x, y, z u. s. w. die unbekannten, dagegen a, b, c u. s. w. die bekannten Größen sind.

Nach der Gestalt der auf diese Weise gewonnenen sogenannten geordneten Form der Gleichung theilt man die Gleichungen mit Rücksicht auf die Zahl der Unbekannten ein in Gleichungen mit einer, zwei, drei u. s. w. Unbekannten, mit Rücksicht auf die höchste vorkommende Potenz der Unbekannten in Gleichungen vom ersten, zweiten, dritten u. s. w. Grade. Die Gleichungen des ersten Grades heißen auch einfache Gleichungen, die des zweiten Grades heißen quadratische, die des dritten kubische, die des vierten biquadratische, alle übrigen dagegen Gleichungen höherer Grade.

A. Einfache Gleichungen mit einer Unbekannten.

§ 94 [§ 87] (Heis § 61).

Hat man die gegebene Gleichung auf die geordnete Form $ax = b$ gebracht, so ist die Wurzel unmittelbar gegeben, indem man beide Seiten durch a dividirt; die Gleichung lautet dann $x = \frac{b}{a}$.

In Bezug auf die Gewinnung der geordneten Form sind hier, wie bei allen übrigen Gleichungen, folgende Fälle zu unterscheiden:

1) Die Gleichung enthält keine Klammern, keine Nenner und keine Wurzeln. — In diesem Falle ergiebt sich die gesuchte Form unmittelbar, wenn man alle Glieder, welche die Unbekannte enthalten, auf die eine Seite, alle übrigen Glieder auf die andere bringt und die gleichnamigen Glieder nach bekannten Regeln zusammenzieht.

Beispiel. Die gegebene Gleichung sei

$76 + 15x - 24 = 43x + 6 - 5x$. Durch Transponiren erhält man

$$\left.\begin{array}{r} +15x \\ -43x \\ +5x \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} +6 \\ -76 \\ +24 \end{array}\right. \text{ oder}$$
$$-23x = -46 \text{ oder } 23x = 46; \text{ daraus } x = \frac{46}{23} = 2.$$

2) Die Unbekannte ist in Klammern enthalten, kommt aber nicht im Nenner oder unter einem Wurzelzeichen vor. — Dann werden die Klammern zunächst aufgelöst und weiter wird wie in 1) verfahren.

Beispiel. $19x - (48 + x) = 3(4x - 7) - (2x + 3)$.

$19x - 48 - x = 12x - 21 - 2x - 3$ oder

$$\left.\begin{array}{r} 19x \\ -\ x \\ -12x \\ +\ 2x \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r} -21 \\ -\ 3 \\ +48 \end{array}\right.$$

$8x = 24$ oder $x = 3$.

3) Die Unbekannte kommt auch im Nenner, aber nicht unter dem Wurzelzeichen vor. — Dann müssen durch Multiplikation aller Glieder der Gleichung mit den Nennern, in welchen die Unbekannte vorkommt, oder mit ihrem General-Nenner diese Nenner beseitigt, und die Regeln unter Nr. 1) und 2) zur Anwendung gebracht werden.

Beispiel.

$$\frac{a}{b+cx} = d \text{ oder } a = d(b+cx) = bd + cdx,$$

$$a - bd = cdx \text{ oder } x = \frac{a-bd}{cd}.$$

Es ist aber zweckmäßig, alle in der gegebenen Gleichung vorkommenden Nenner, also auch diejenigen, in welchen die Unbekannte nicht enthalten ist, zu beseitigen. Zu dem Zwecke multiplicirt man alle Glieder der Gleichung mit den einzelnen Nennern der Reihe nach oder mit ihrem General-Nenner und verfährt dann nach den Regeln unter Nr. 1) und Nr. 2).

Beispiel.

1) $$\frac{5x-1}{9} - \frac{7x+13}{6} + \frac{3x-5}{4} = 3x - \frac{9x-19}{8} - 25 \quad \underbrace{72}$$

$$8(5x-1) - 12(7x+13) + 18(3x-5) = 72 \cdot 3x - 9(9x-19) - 72 \cdot 25$$

$$\left.\begin{array}{r} 40x - 8 \\ -84x - 156 \\ +54x - 90 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r} 216x \\ -81x + 171 \\ -1800 \end{array}\right.$$

$10x - 254 = 135x - 1629$ oder $10x - 135x = -1629 + 254$

oder $-125x = -1375$ oder $125x = 1375$

$$x = \frac{1375}{125} = 11.$$

2) $$\frac{2x-13}{2x-16} + \frac{2x-12}{x-8} = \frac{29}{24} - \frac{70-9x}{3x-24}$$

$$\frac{2x-13}{2(x-8)} + \frac{2x-12}{x-8} = \frac{29}{24} - \frac{70-9x}{3(x-8)} \quad \underbrace{24(x-8)}$$

$$12(2x-13)+24(2x-12)=29(x-8)-8(70-9x)$$

$$\left.\begin{array}{r}24x-156\\+48x-288\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l}29x-232\\+72x-560\end{array}\right.$$

$$72x-444 = 101x-792 \text{ oder } 792-444=29x$$

$$\text{oder } 348=29x$$

$$x=\frac{348}{29}=12.$$

4) Die Gleichung enthält auch Wurzeln und zwar Quadratwurzeln, in denen die Unbekannte als Radikand erscheint. — Ist nur ein Glied mit einer Quadratwurzel vorhanden, so wird dasselbe nach Beseitigung aller Klammern und Nenner durch Transponiren auf einer Seite isolirt, und die andere Seite auf möglichst wenige Glieder reducirt; darauf werden beide Seiten als Ganze ins Quadrat erhoben, und so die Wurzel beseitigt, worauf dann die weitere Vereinfachung folgt. Sind 2 oder mehr Glieder mit Quadratwurzeln vorhanden, so muß dasselbe Verfahren wiederholt angewandt werden.

Beispiel.

$$\sqrt{2x-3n}=3\sqrt{n}-\sqrt{2x}$$

$$2x-3n=(3\sqrt{n}-\sqrt{2x})^2=9n-6\sqrt{2nx}+2x$$

$$6\sqrt{2nx}=9n+3n=12n$$

$$\sqrt{2nx}=2n$$

$$2nx=4n^2$$

$$x=\frac{4n^2}{2n}=2n.$$

Anmerkung. Der Fall, wo andere Wurzeln als Quadratwurzeln sich finden, wird, weil er größere Schwierigkeiten bietet, übergangen.

B. Einfache Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

§ 95 [§ 88] (Heis § 65).

Zur Bestimmung mehrerer Unbekannten bedarf man sovieler Gleichungen als unbekannte Größen vorhanden sind. Wesentliches Erforderniß ist jedoch, daß die in einer Gleichung enthaltene Bedingung von denen in den anderen unabhängig sei, daß also nicht eine Gleichung aus einer oder mehreren der anderen dadurch sich ableiten läßt, daß mit beiden Seiten gleiche Rechnungen vorgenommen werden. Ist diese Bedingung erfüllt, und sind zunächst 2 unabhängige Gleichungen mit 2 Unbekannten gegeben, so besteht ihre Auflösung darin, daß man aus ihnen zunächst eine Gleichung mit einer der Unbekannten abzuleiten sucht. Durch Auflösen derselben gewinnt man dann die eine Wurzel und durch ein analoges Verfahren auch die zweite. Eine mittelbare Berechnung der zweiten Wurzel

durch Einsetzen des für die erste gefundenen Werthes in eine der Gleichungen ist möglichst zu vermeiden.

Die abgeleitete Gleichung mit nur einer Unbekannten heißt die Eliminationsgleichung. Für die Ableitung derselben, das sogenannte Eliminiren, giebt es folgende drei Wege:

1) Methode der Substitution oder Einsetzung.

Nachdem man jede der beiden Gleichungen in die geordnete Form gebracht hat, entwickelt man aus einer der Gleichungen den Werth einer Unbekannten, ausgedrückt durch alle übrigen Größen, und setzt diesen Werth an Stelle der Unbekannten in die andere Gleichung ein, also:

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad x = \frac{c_1 - b_1y}{a_1}$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$
$$a_2\frac{c_1 - b_1y}{a_1} + b_2y = c_2 \qquad \underline{a_1}$$
$$a_2(c_1 - b_1y) + a_1b_2y = a_1c_2$$
$$a_2c_1 - a_2b_1y + a_1b_2y = a_1c_2$$
$$y(a_1b_2 - a_2b_1) = a_1c_2 - a_2c_1$$
$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \text{ oder } = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}.$$

x wird ebenso gefunden, läßt sich aber auch direct ableiten, wenn man a_1, a_2 mit b_1, b_2 und umgekehrt vertauscht.

2) Methode der Comparation oder Gleichsetzung.

Aus der geordneten Form jeder der beiden Gleichungen wird der Werth derselben Unbekannten, wie vorstehend, entwickelt, und dann durch Gleichsetzung der beiden Werthe die neue Gleichung gewonnen, also:

$$a_1x + b_1y = c_1, \quad y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1}$$
$$a_2x + b_2y = c_2, \quad y = \frac{c_2 - a_2x}{b_2}$$
$$\frac{c_1 - a_1x}{b_1} = \frac{c_2 - a_2x}{b_2} \qquad \underline{b_1 \cdot b_2}$$
$$b_2(c_1 - a_1x) = b_1(c_2 - a_2x)$$
$$b_2c_1 - a_1b_2x = b_1c_2 - a_2b_1x$$
$$b_2c_1 - b_1c_2 = x(a_1b_2 - a_2b_1)$$
$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \text{ oder } = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_2b_1 - a_1b_2}.$$

3) Methode der Addition oder Subtraction (englische Methode).

Durch passende Multiplikationen einer oder beider Gleichungen in

ihrer geordneten Form verschafft man in beiden Gleichungen den Gliedern mit derselben Unbekannten gleiche Coëfficienten und verbindet dann beide Gleichungen durch Addition oder Subtraction so zu einer einzigen, daß jene Glieder sich vernichten, also:

$$\left.\begin{array}{r} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array}\right| \text{ multiplicirt mit } \left|\begin{array}{l} a_2 \\ a_1 \end{array}\right.$$

$$a_1a_2x + a_2b_1y = a_2c_1$$

$$a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2; \text{ durch Subtraction erhält man:}$$

$$a_2b_1y - a_1b_2y = a_2c_1 - a_1c_2$$

$$y(a_2b_1 - a_1b_2) = a_2c_1 - a_1c_2$$

$$y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Anmerkung. Eine Modification der vorstehenden Methode ist die sogenannte Bézout'sche oder französische.

Zusatz. Sind 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten gegeben, so sucht man auf einem der vorher erläuterten Wege erst 2 Gleichungen mit denselben 2 Unbekannten und dann durch Wiederholung des Verfahrens eine Gleichung mit einer Unbekannten zu gewinnen. Die Verallgemeinerung für eine noch größere Anzahl von Gleichungen ergiebt sich von selbst.

C. Quadratische Gleichungen.

§ 96 [§ 89] (Heis § 69).

Die geordnete Form einer quadratischen Gleichung mit einer Unbekannten ist $ax^2 + bx = d$ oder auf Null reducirt $ax^2 + bx + c = 0$, wo a nicht Null sein darf. Da $a \gtrless 0$ ist, so kann man die Gleichung durch a dividiren und erhält so als neue, ebenso allgemeine Form jeder quadratischen Gleichung:

$$x^2 + px + q = 0, \text{ wenn } \frac{b}{a} = p \text{ und } \frac{c}{a} = q \text{ gesetzt wird.}$$

Wenn in dieser reducirten quadratischen Gleichung

1) der Coëfficient $q = 0$, aber $p \gtrless 0$ ist, so geht die Gleichung über in $x \cdot (x + p) = 0$; und daraus folgen die beiden Gleichungen ersten Grades $x = 0$ und $x + p = 0$. Die Wurzeln der Gleichung $x^2 + px = 0$ sind also $x_1 = 0$ und $x_2 = -p$.

2) Wenn aber nur der Coëfficient $p = 0$ ist, so erhält man die sogenannte reine quadratische Gleichung

$$x^2 = -q,$$

deren Wurzeln unmittelbar durch beiderseitige Radicirung sich ergeben:

$$x = \pm\sqrt{-q} \text{ (siehe Lehre von den Wurzeln § 75,10).}$$

Die Wurzeln der reinen quadratischen Gleichung sind also nur dann reell, wenn der Coëfficient q negativ ist.

3) Sind beide Coëfficienten von Null verschieden, so addirt man, um die linke Seite der Gleichung $x^2 + px = -q$ auf die Form eines vollständigen Quadrates $a^2 + 2ab + b^2$ zu bringen, beiderseits das Quadrat des halben Coëfficienten von x, die sogenannte quadratische Ergänzung, und erhält so:

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q \text{ oder}$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \text{ das heißt}$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Die Wurzeln der Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sind demnach:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ und } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Folgerung. Jede quadratische Gleichung hat also zwei Wurzeln. Wenn in der geordneten Form $x^2 + px + q = 0$ das sogenannte absolute Glied q (welches nie gleich 0 sein darf)

1) negativ ist, so sind beide Wurzeln reell, ungleich und von ungleichem Vorzeichen;

2) positiv ist, so sind beide Wurzeln

a) reell und ungleich, aber von gleichem Vorzeichen, wenn $\frac{p^2}{4} > q$ ist,

b) reell und einander gleich, wenn $\frac{p^2}{4} = q$ ist,

c) imaginär, wenn $\frac{p^2}{4} < q$ ist.

Anmerkung. Jede quadratische Gleichung von anderer Form ist erst auf die Form $x^2 + px + q$ (oder $ax^2 + bx + c = 0$) zu bringen, d. h. nach anderen Umformungen sind auf einer Seite alle Glieder mit x^2 und alle Glieder mit x in je ein Glied zusammenzuziehen, (dann ist durch den Coëfficienten von x^2 die ganze Gleichung zu dividiren) und dafür zu sorgen, daß der Coëfficient des ersten Gliedes positiv ist.

§ 97 [§ 90]. Lehrsatz.

In der auf 0 reducirten quadratischen Gleichung $x^2+px+q=0$ ist die Summe der beiden Wurzeln gleich dem Coëfficienten von x mit umgekehrtem Zeichen, und ihr Produkt gleich dem absoluten Gliede.

Beweis. Da
$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$
und
$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \text{ ist, so ist}$$
$$x_1 + x_2 = -p$$
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = +q.$$

Folgerung 1. Aus der Gleichung und einer Wurzel läßt sich die andere, aus den beiden Wurzeln die Gleichung bilden.

Folgerung 2. Zwei Größen x und y, welche den beiden Gleichungen $x+y=a$ und $x \cdot y = b$ genügen, können als die Wurzeln der quadratischen Gleichung $z^2 - az + b = 0$ angesehen werden. Ihre Werthe sind also
$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \text{ und } y = \frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Folgerung 3. Jedes Polynom von der Form x^2+px+q läßt sich in ein Produkt $(x-\alpha)(x-\beta)$ verwandeln, wenn man für α und β die Wurzeln der Gleichung $x^2+px+q=0$ wählt.

Beweis. Da
$$(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta \text{ und}$$
$$x^2+px+q = x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2 \text{ ist, so}$$
ist
$$x^2+px+q = (x-\alpha)(x-\beta), \text{ wenn } \alpha = x_1 \text{ und}$$
$\beta = x_2$ gewählt wird.

Gleichzeitig erhellt hieraus, daß jede Gleichung zweiten Grades nur zwei Wurzeln hat; denn ein zweitheiliges Produkt kann nur auf zweifache Weise zu Null werden, indem der eine oder der andere Factor gleich 0 wird.

Anmerkung. In ähnlicher Weise läßt sich jedes Polynomium von der Form $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + fx + g$, in welcher n eine positive ganze Zahl ist, in ein Produkt von n Factoren zerlegen. Alle algebraischen Gleichungen n^{ten} Grades haben also genau n Wurzeln.

Trigonometrische Auflösung der quadratischen Gleichungen.

§ 98 [§ 91].

Die Ausrechnung von $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ bietet große Weitläufigkeiten, wenn p und q vielziffrige Zahlen sind. Diese lassen sich aber durch folgende trigonometrische Umformungen vermeiden:

I. Fall. q ist negativ, also die geordnete Form lautet

$$x^2 + px = + q.$$

Dann ist in

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} = -\frac{p}{2} \pm \frac{p}{2}\sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}}$$

der Bruch $\frac{4q}{p^2}$ jedenfalls positiv und seinem absoluten Werthe nach durch nichts beschränkt. Man kann also $\frac{4q}{p^2} = tg^2 \varphi$ setzen; daraus folgt

$$1)\ tg\varphi = \pm \frac{2}{p}\sqrt{q} \text{ und } \frac{p}{2} = \pm \frac{\sqrt{q}}{tg\varphi},$$

indem man, unter φ einen spitzen Winkel sich denkend, das obere oder untere Zeichen wählt, je nachdem p selbst positiv oder negativ ist. Durch Substitution erhält man

$$x = -\frac{p}{2}\left(1 \mp \sqrt{1 + tg^2\varphi}\right) = -\frac{p}{2}(1 \mp \sec\varphi) = -\frac{p}{2} \cdot \frac{\cos\varphi \mp 1}{\cos\varphi}$$

$$= \mp \sqrt{q} \cdot \frac{\cos\varphi \mp 1}{\cos\varphi \cdot tg\varphi} = \mp \sqrt{q} \cdot \frac{\cos\varphi \mp 1}{\sin\varphi}$$

$$2^a)\ x_1 = \mp \sqrt{q}\frac{\cos\varphi - 1}{\sin\varphi} = \pm \sqrt{q}\frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi} = \pm \sqrt{q} \cdot tg\frac{\varphi}{2}$$

$$2^b)\ x_2 = \mp \sqrt{q}\frac{\cos\varphi + 1}{\sin\varphi} = \mp \sqrt{q} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}.$$

Die Gleichung 1) giebt durch logarithmische Behandlung φ, die Gleichungen 2) führen dann durch ähnliche Behandlung zur Kenntniß der Wurzeln; und zwar sind die oberen oder die unteren Vorzeichen vor dem Factor $\sqrt{q}$ zu wählen, je nachdem der Coëfficient p positiv oder negativ ist.

II. Fall. q ist positiv, aber $\frac{p^2}{4} > q$. Dann ist in

$$x = -\frac{p}{2} \pm \frac{p}{2}\sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}$$

$\frac{4q}{p^2}$ ein positiver echter Bruch. Folglich kann man stets einen spitzen Winkel φ der Art finden, daß $\sin^2\varphi = \frac{4q}{p^2}$, also

$$1)\ \sin\varphi = \pm \frac{2}{p}\sqrt{q},\ \frac{p}{2} = \pm \frac{\sqrt{q}}{\sin\varphi} \text{ ist.}$$

$$x = -\frac{p}{2}\left(1 \mp \sqrt{1 - \sin^2\varphi}\right) = -\frac{p}{2}(1 \mp \cos\varphi) = \mp \sqrt{q}\frac{1 \mp \cos\varphi}{\sin\varphi},$$

also $2^a)\ x_1 = \mp \sqrt{q} \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$

$2^b)\ \quad = \mp \sqrt{q} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}.$

Auch hier führt die Gleichung 1) zur Kenntniß des Winkels φ, die Gleichungen 2) zur Kenntniß der Wurzeln; auch hier gelten die oberen oder die unteren Vorzeichen, je nachdem p positiv oder negativ ist.

III. Fall. q ist negativ, aber $\frac{p^2}{4} < q$. Dann sind nach Früherem die beiden Wurzeln imaginär.

Gleichungen, welche sich auf quadratische zurückführen lassen.

§ 99 [§ 92].

I. Gleichungen von der Form $x^{2n} + ax^n + b = 0$.

Setzt man $x^n = y$, so ist $x^{2n} = y^2$, also erhält man

$$y^2 + ay + b = 0.$$

Diese Gleichung giebt 2 Werthe für y, nämlich y_1 und y_2, und aus ihnen folgen als Werthe von x

$$x_1 = \sqrt[n]{y_1},\ x_2 = \sqrt[n]{y_2},$$

welche, wenn die Radicirung sich nicht ausführen läßt, mit Hülfe der Logarithmen berechnet werden.

II. Reciproke Gleichungen.

Eine Gleichung heißt reciprok, wenn der reciproke Werth jeder Wurzel der Gleichung ebenfalls Wurzel der Gleichung ist. Solche Gleichungen sind daran erkennbar, daß die Coëfficienten je zweier Glieder, welche in der auf 0 reducirten geordneten Form von Anfang und Ende gleich weit abstehen, dieselben sind, höchstens bei Gleichungen von ungeraden Graden sich durch die Vorzeichen unterscheiden. Es gehören dahin also Gleichungen von folgender Form:

1) $x^3 + ax^2 \pm ax \pm 1 = 0$

2) $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$

3) $x^5 + ax^4 + bx^3 \pm bx^2 \pm ax \pm 1 = 0$

u. s. w.

Die Lösung einer reciproken Gleichung $2n^{ten}$ oder $(2n+1)^{ten}$ Grades läßt sich stets auf die Lösung einer Gleichung n^{ten} Grades zurückführen. Die Methode dieser Reduction soll an einigen Beispielen gezeigt werden.

Form 1. $x^3 + ax^2 + ax + 1 = 0$.

Man substituire u^2 für x:

$$u^6 + au^4 + au^2 + 1 = 0 \text{ oder } (u^6 + 1) + a(u^4 + u^2) = 0.$$

Die Division durch u^3 liefert:

$$\left(u^3 + \frac{1}{u^3}\right) + a\left(u + \frac{1}{u}\right) = 0.$$

Setzt man weiter $u + \frac{1}{u} = z$, so ist

$$z^3 = u^3 + \frac{1}{u^3} + 3\left(u + \frac{1}{u}\right), \text{ also } u^3 + \frac{1}{u^3} = z^3 - 3z;$$

$$z^3 - 3z + az = 0 \text{ oder } z\cdot(z^2 - (3-a)) = 0, \text{ also}$$
$$\text{entweder } z = 0 \text{ oder } z^2 - (3-a) = 0.$$

Aus $z = 0$ folgt $u + \frac{1}{u} = 0$ oder $u^2 + \frac{1}{u^2} + 2 = 0$, d. h.

$$x + \frac{1}{x} + 2 = 0 \text{ oder } x_1 = -1.$$

Aus $z^2 - (3-a) = 0$ folgt $u^2 + \frac{1}{u^2} + 2 - (3-a) = 0$, d. h.

$$x + \frac{1}{x} + 2 - 3 + a = 0 \text{ oder } x^2 + (a-1)x + 1 = 0,$$

woraus sich x_2 und x_3 berechnen läßt.

Anmerkung. $x^3 + ax^2 - ax - 1$ wird ebenso behandelt, nur wird $u - \frac{1}{u} = z$ gesetzt. x_1 ist $= +1$.

Form 2. $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$

$$a(x^4 + 1) + b(x^3 + x) + cx^2 = 0.$$

Dividirt man durch x^2, so erhält man

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Setzt man hier $x + \frac{1}{x} = z$, so ist $z^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$, also

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2;$$

$$az^2 + bz + c - 2a = 0.$$

Diese Gleichung giebt 2 Werthe, z_1 und z_2, für z, und jeder derselben giebt durch die quadratische Gleichung $x + \frac{1}{x} = z$ 2 Werthe von x, so daß also im Ganzen 4 solche Werthe existiren.

Form 3. $x^5 + ax^4 + bx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0.$

Man substituire u^2 für x:

$$(u^{10} + 1) + a\cdot(u^8 + u^2) + b\cdot(u^6 + u^4) = 0.$$

Die Division durch u^5 liefert:

$$\left(u^5 + \frac{1}{u^5}\right) + a \cdot \left(u^3 + \frac{1}{u^3}\right) + b \cdot \left(u + \frac{1}{u}\right) = 0.$$

Setzt man $u + \frac{1}{u} = z$, so ist

$$u^3 + \frac{1}{u^3} = z^3 - 3z, \text{ und}$$

$$u^5 + \frac{1}{u^5} = z^5 - 5\left(u^3 + \frac{1}{u^3}\right) - 10\left(u + \frac{1}{u}\right), \text{ oder}$$

$$= z^5 - 5z^3 + 15z - 10z$$

$$= z^5 - 5z^3 + 5z;$$

$$z^5 + (a - 5)z^3 + (b - 3a + 5)z = 0 \text{ oder}$$

$$z\{z^4 + (a - 5)z^2 + (b - 3a + 5)\} = 0.$$

Ein Wurzelwerth dieser Gleichung ist $z = 0$, 2 andere Werthe von z^2 giebt die Gleichung

$$z^4 + (a - 5)z^2 + (b - 3a + 5) = 0,$$

und jeder dieser Werthe giebt durch die quadratische Gleichung

$$u^2 + \frac{1}{u^2} = z^2 - 2 \text{ oder}$$

$$x + \frac{1}{x} = z^2 - 2$$

2 Werthe von x, so daß also im Ganzen 5 solche Werthe existiren.

Anmerkung 1. Die Form $x^5 + ax^4 + bx^3 - bx^2 - ax - 1 = 0$ wird wieder analog behandelt.

Anmerkung 2. Reciproke Gleichungen ungeraden Grades haben die Wurzel -1 oder $+1$, je nachdem die mit gleichen Coëfficienten versehenen Glieder gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen besitzen.

Anmerkung 3. In jedem einzelnen Falle kann man zeigen, daß die eine Hälfte der Wurzelwerthe die reciproken Werthe der anderen sind. Hat eine Wurzel eine irrationale Form, so muß man zu diesem Zwecke den Nenner des reciproken Werthes rational machen. Ist die Zahl der Wurzeln ungerade, so ist eine Wurzel ihrem eigenen reciproken Werthe gleich.

III. Eine dritte Gruppe von besonderen Gleichungen, welche sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen, sind Gleichungen dritten oder fünften Grades, in denen die Coëfficienten der Glieder mit der 0., 2. und 4. Potenz der Unbekannten gleich 0 sind.

§ 100 [§ 93] (Heis § 73).

Bei quadratischen Gleichungen mit zwei oder mehreren Unbekannten muß man eine Eliminationsgleichung mit nur einer Unbekannten zu gewinnen suchen, gleichzeitig aber darauf bedacht sein, daß diese Eliminationsgleichung selbst noch vom 2. Grade ist oder wenigstens

sich auf eine quadratische zurückführen läßt. Wie dieses zu erreichen ist, läßt sich allgemein selbst für nur 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten nicht angeben; nur für bestimmte Gruppen von Gleichungen giebt es allgemeine Regeln.

Häufig führen Substitutionen, wie z. B. s für $x + y$ oder $x - y$ und p für $x \cdot y$ zu zwei Gleichungen in s und p, welche sich leicht lösen lassen; x und y sind dann mit Hülfe einer quadratischen Gleichung (vergl. § 97) aus den Werthen von s und p zu berechnen.

D. Cubische Gleichungen mit einer Unbekannten.

§ 101 [§ 94] (Heis § 95).

Jede cubische Gleichung läßt sich auf die Form

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \text{ (wo } A \gtrless 0 \text{ sein muß)}$$

und dann, indem man durch A dividirt, auf die Form

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

bringen. Ist nun x_1 eine Wurzel dieser Gleichung, so ist $x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c = 0$, also erhält man durch Subtraction

$$(x^3 - x_1^3) + a(x^2 - x_1^2) + b(x - x_1) = 0, \text{ und da}$$

$$x^3 - x_1^3 = (x - x_1)(x^2 + xx_1 + x_1^2), \text{ und}$$

$$x^2 - x_1^2 = (x - x_1)(x + x_1) \text{ ist, so muß}$$

$$(x - x_1)(x^2 + xx_1 + x_1^2 + ax + ax_1 + b) = 0, \text{ oder}$$

wenn $x_1 + a$ mit f und $x_1^2 + ax_1 + b$ mit g bezeichnet wird,

$$(x - x_1)(x^2 + fx + g) = 0 \text{ sein.}$$

Das links stehende Produkt wird nur zu Null, wenn entweder der eine Factor, oder der andere Factor gleich Null wird; also hat die cubische Gleichung außer der Wurzel x_1 noch die Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 + fx + g = 0$, d. h. im Ganzen 3 Wurzeln. Ist demnach einer der Wurzelwerthe einer cubischen Gleichung gleich x_1 gefunden, so erhält man die beiden anderen, indem man die gegebene cubische Gleichung durch $x - x_1$ dividirt, den Quotienten $= 0$ setzt und die entstehende quadratische Gleichung von der Form $x^2 + fx + g = 0$ auflöst.

Die Auflösung der allgemeinen cubischen Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

reducirt sich auf die Auflösung von Gleichungen 1. und 2. Grades, wenn

1) die Coëfficienten b und c gleichzeitig 0 sind. Da dann

$$x^3 + ax^2 = 0 \text{ oder } x^2(x + a) = 0$$

ist, so sind die 3 Wurzeln der gegebenen cubischen Gleichung: 0, 0 und — a.

2) Wenn nur der Coëfficient c gleich 0 ist, so lautet die gegebene Gleichung $x^3 + ax^2 + bx = 0$ oder $x(x^2 + ax + b) = 0$, deren Wurzeln sich durch Auflösen der beiden Gleichungen

$$x = 0 \text{ und } x^2 + ax + b = 0$$

ergeben, deren Wurzeln also sind:

$$0, \quad -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}, \quad -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

In der allgemeinen Form der cubischen Gleichung darf also das **absolute Glied c nicht gleich Null** sein.

Besondere Beachtung verdienen die Fälle, in welchen der Coëfficient a oder der Coëfficient b oder beide zugleich gleich 0 sind.

1) Wenn der Coëfficient a gleich 0 ist, so lautet die cubische Gleichung

$$x^3 + bx + c = 0.$$

Auf diese Form kann jede allgemeine cubische Gleichung reducirt werden. Die allgemeine cubische Gleichung

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ läßt sich nämlich auch so schreiben:

$$\left(x + \frac{a}{3}\right)^3 + \left(b - \frac{1}{3}a^2\right)x + \left(c - \frac{1}{27}a^3\right) = 0.$$

Ersetzt man hier $x + \frac{a}{3}$ durch y, also x durch $y - \frac{a}{3}$, so erhält man die **reducirte cubische Gleichung**

$$y^3 + \left(b - \frac{1}{3}a^2\right)y + \left(\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c\right) = 0,$$

welche obige Form annimmt, sobald für $b - \frac{1}{3}a^2$ Ein Buchstabe, z. B. p, und für $\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$ z. B. q gesetzt wird:

$$y^3 + py + q = 0.$$

2) Wenn der Coëfficient b gleich 0 ist, so reducirt man die gegebene cubische Gleichung $x^3 + ax^2 + c = 0$ durch die Substitution $\frac{1}{y}$ für x auf die obige Form:

$$cy^3 + ay + 1 = 0 \text{ oder } y^3 + \frac{a}{c}y + \frac{1}{c} = 0.$$

Die Auflösung der cubischen Gleichungen erfordert also nur die Betrachtung der beiden Specialfälle:

I. wenn die Coëfficienten a und b gleichzeitig $= 0$ sind:

$$x^3 + c = 0$$

II. wenn einer der Coëfficienten a oder $b = 0$ ist:

$$x^3 + px + q = 0.$$

Im ersten Falle heißt die cubische Gleichung eine reine und als Wurzelwerth ergiebt sich sogleich $x = \sqrt[3]{-c}$. So folgt z. B. aus der Gleichung $x^3 - 1 = 0$ oder $x^3 = +1$ als Wurzel $x = \sqrt[3]{+1}$, also als erste Wurzel $x_1 = +1$. Da nun aber $\frac{x^3-1}{x-1} = x^2 + x + 1$ ist, so gewinnt man durch Auflösen der Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2},\quad x_3 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

Also hat $\sqrt[3]{1}$ außer der Einheit noch zwei imaginäre Werthe $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ und $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, welche der Abkürzung halber mit ε_1 und ε_2 bezeichnet werden sollen. Die 3 Zahlen 1, ε_1 und ε_2 pflegt man die dritten Wurzeln der Einheit zu nennen. Es muß also $\varepsilon_1{}^3 = 1$ und $\varepsilon_2{}^3 = 1$ sein. Zu merken ist, daß auch $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = 1$ ist.

Anmerkung. Ebenso wie $\sqrt[3]{1}$ hat auch jede andere Cubikwurzel 3 Werthe.

Wir gehen nun zur Lösung der reducirten cubischen Gleichung $x^3 + px + q = 0$ über.

Es gelten für jeden beliebigen Werth von α und β die drei Gleichungen

$$(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) - (\alpha^3 + \beta^3) = 0$$
$$(\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2)^3 - 3\alpha\beta(\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2) - (\alpha^3 + \beta^3) = 0$$
$$(\alpha\varepsilon_2 + \beta\varepsilon_1)^3 - 3\alpha\beta(\alpha\varepsilon_2 + \beta\varepsilon_1) - (\alpha^3 + \beta^3) = 0.$$

Die erste dieser drei Gleichungen wird mit der reducirten cubischen Gleichung $x^3 + px + q = 0$ identisch, wenn

$$x = \alpha + \beta,\quad p = -3\alpha\beta \text{ und } q = -(\alpha^3 + \beta^3)$$

ist. Bestimmt man demnach die beiden Größen α und β aus den beiden letzten Gleichungen, so ist $\alpha + \beta$ eine Wurzel der gegebenen reducirten cubischen Gleichung. Und da die beiden anderen der obigen drei Gleichungen dieselben Coëfficienten, wie die erste von ihnen, haben, so werden auch $\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2$ und $\alpha\varepsilon_2 + \beta\varepsilon_1$ Wurzeln der gegebenen cubischen Gleichung sein, wenn α und β aus den beiden Gleichungen $p = -3\alpha\beta$ und $q = -(\alpha^3 + \beta^3)$ bestimmt werden.

Durch Elimination von β folgt aus diesen beiden Gleichungen folgende neue Gleichung in α

$$\alpha^6 + q\alpha^3 = \frac{p^3}{27},$$

welche den Namen der Resolvente der gegebenen cubischen Gleichung führt. Aus ihr ergiebt sich

$\alpha^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}$, und daher $\beta^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}$ oder

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} \text{ und } \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}.$$

Die 3 Wurzeln der Gleichung $x^3 + px + q = 0$ sind demnach

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

$$x_2 = \varepsilon_1 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \varepsilon_2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

$$x_3 = \varepsilon_2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \varepsilon_1 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}.$$

Die erste dieser 3 Formeln, welche die Cardanische Formel (Cardano, 1545) heißt, kann einen reellen Werth für x liefern; die beiden anderen Formeln geben stets imaginäre Werthe für x.

Anmerkung. Man kann die beiden imaginären Wurzeln auch dadurch ermitteln, daß man nach Berechnung der reellen Wurzel x_1 die Gleichung durch $x - x_1$ dividirt, den Quotienten gleich 0 setzt und die entstehende quadratische Gleichung auflöst.

Trigonometrische Lösung der cubischen Gleichungen.

§ 102 [§ 95].

Die numerische Berechnung des reellen Werthes von x durch diese Formel ist schwierig in dem Falle, wenn $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}$ **zwar eine positive, aber keine Quadratzahl** ist; man erleichtert sich die Berechnung dann durch trigonometrische Umformungen in folgender Weise:

Zunächst ist

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^2}}\right)} + \sqrt[3]{\frac{q}{2}\left(-1 - \sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^2}}\right)}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{q}{2}}\left\{\sqrt[3]{-1 + \sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^2}}} - \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^2}}}\right\}.$$

Dann hat man die Fälle, in denen der Coëfficient p einen positiven oder negativen Zahlenwerth besitzt, zu unterscheiden.

I. Es sei $p > 0$. In diesem Falle bestimme man den spitzen Winkel φ so, daß $\tang^2\varphi = \frac{4p^3}{27q^2}$, also $\tang\varphi = \pm\frac{2}{q}\sqrt{\frac{p^3}{27}}$ ist; man hat hierbei der Quadratwurzel das positive oder negative Vorzeichen zu geben, je nachdem q positiv oder negativ ist, so daß der Werth von $\tang\varphi$ stets positiv wird. Dann ist

$$\frac{q}{2} = \pm\cotg\varphi\cdot\sqrt{\frac{p^3}{27}},\quad \sqrt[3]{\frac{q}{2}} = \pm\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\sqrt[3]{\cotg\varphi},\ \text{und}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\left\{\sqrt[3]{(\sec\varphi - 1)\cotg\varphi} - \sqrt[3]{(\sec\varphi + 1)\cdot\cotg\varphi}\right\}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\left\{\sqrt[3]{\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}} - \sqrt[3]{\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}}\right\}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\left\{\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} - \sqrt[3]{\cotg\frac{\varphi}{2}}\right\}.$$

Wählt man den spitzen Winkel ψ so, daß

$$\operatorname{tg}\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}},\ \text{also}\ \cotg\psi = \sqrt[3]{\cotg\frac{\varphi}{2}}\ \text{ist, so wird}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\left(\operatorname{tg}\psi - \cotg\psi\right) = \pm\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\frac{\sin^2\psi - \cos^2\psi}{\sin\psi\cdot\cos\psi}$$

$$= \mp\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\frac{\cos 2\psi}{\frac{1}{2}\sin 2\psi} = \mp 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\cotg 2\psi.$$

Die Auswerthung von x besteht also darin, daß man zuerst aus

$\operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{2}{q}\sqrt{\frac{p^3}{27}}$ den Winkel φ berechnet, dann aus

$\operatorname{tg}\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}$ den Winkel ψ sucht

und endlich aus

$x = \mp 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\cotg 2\psi$ den Werth von x findet. —

Das obere oder untere Vorzeichen ist zu wählen, je nachdem q positiv oder negativ ist.

II. Es sei $p < 0$. Da $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}$ als **positiv** vorausgesetzt war, so muß $+\frac{4p^3}{27q^2}$ ein **negativer echter** Bruch sein. Man kann deshalb den spitzen Winkel φ so wählen, daß (für p seinen absoluten Werth

genommen) $\sin^2 \varphi = \frac{4p^3}{27q^2}$, also $\sin \varphi = \pm \frac{2}{q}\sqrt{\frac{p^3}{27}}$ ist; man gebe der Quadratwurzel das positive oder das negative Zeichen, je nachdem q positiv oder negativ ist, so daß also der Werth von $\sin \varphi$ stets positiv ist. Dann ist

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2}} = \pm \sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\sin \varphi}} \text{ und}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\sqrt[3]{\frac{-1+\cos\varphi}{\sin\varphi}} - \sqrt[3]{\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}}\right\}$$

$$= \mp \sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\sqrt[3]{\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}} + \sqrt[3]{\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}}\right\}$$

$$= \mp \sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} + \sqrt[3]{\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}}\right\}.$$

Ist wieder ψ ein solcher spitzer Winkel, daß

$$\operatorname{tg}\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}, \text{ also } \operatorname{cotg}\psi = \sqrt[3]{\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}} \text{ ist, so wird}$$

$$x = \mp \sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\operatorname{tg}\psi + \operatorname{cotg}\psi\right\} = \mp \sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\psi} = \mp \frac{2}{\sin 2\psi} \cdot \sqrt{\frac{p}{3}};$$

also ist auch hier x durch eine dreifache Rechnung gegeben. — Auch hier ist das obere oder untere Vorzeichen zu wählen, je nachdem q positiv oder negativ ist.

Anmerkung. Auch die beiden Formeln zur Berechnung der Wurzeln x_2 und x_3 würden sich durch ähnliche Entwicklungen zur bequemeren Berechnung umformen lassen. Schneller aber gelangt man, nachdem die reelle Wurzel x_1 berechnet ist, durch Division mit $x - x_1$ und Auflösung der entstehenden quadratischen Gleichung zum Ziel.

Der casus irreductibilis.

§ 103 [§ 96] (Heis § 96).

Wenn aber $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}$ **einen negativen Werth erhält**, so erscheint auch die durch die Cardanische Formel gegebene Wurzel der reducirten cubischen Gleichung in imaginärer Form. Dieser Fall tritt ein, wenn **der Coëfficient p negativ, und wenn gleichzeitig** $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$ ist, (wobei für p wieder der absolute Werth des Coëfficienten von x zu nehmen ist).

Da man anfangs die durch die Cardanische Formel gegebene Wurzel der Gleichung $x^3 - px + q = 0$ nicht auf die anderweitig bekannt gewordene reelle Form zu reduciren verstand, so nannte man diesen Fall

den casus irreductibilis. Er ist von um so größerem Interesse, als unter den angeführten Bedingungen alle drei Wurzeln der cubischen Gleichung reell sind.

Im irreductibeln Falle gelangt man zu einer directen Auflösung durch die Formel für den Cosinus einer Summe. Es ist nämlich

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta, \text{ also}$$

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos 2\alpha \cdot \cos\alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin\alpha \\ &= \cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2\sin^2\alpha\cos\alpha \\ &= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha(1 - \cos^2\alpha) \\ &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha; \text{ daher ist}\end{aligned}$$

$$\cos^3\alpha - \tfrac{3}{4}\cos\alpha - \tfrac{1}{4}\cos 3\alpha = 0.$$

Hieraus folgt, daß die cubische Gleichung $x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\cos\varphi = 0$ die Werthe

$$\cos\frac{\varphi}{3},\ \cos\frac{2\pi + \varphi}{3},\ \cos\frac{4\pi + \varphi}{3} \text{ oder}$$

$$\cos\frac{\varphi}{3},\ -\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right),\ -\cos\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right)$$

zu Wurzeln hat.

Wenn daher eine cubische Gleichung von der Form

$$x^3 - px + q = 0$$

gegeben ist, so ist diese auf die obige Form zu bringen. Zu diesem Zwecke setzt man zunächst yz für x und erhält so

$$y^3 z^3 - pyz + q = 0$$

oder $$y^3 - \frac{p}{z^2}\cdot y + \frac{q}{z^3} = 0.$$

Diese Gleichung wird mit der Gleichung $x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\cos\varphi = 0$ identisch, wenn

$$y = x,\ \frac{p}{z^2} = \frac{3}{4},\ \text{und } \frac{q}{z^3} = -\frac{1}{4}\cos\varphi$$

wird. Bestimmt man also aus den beiden letzten Gleichungen z und φ, so sind die drei Wurzeln der Gleichung $y^3 - \frac{p}{z^2}y + \frac{q}{z^3} = 0$ folgende:

$$y_1 = \cos\frac{\varphi}{3},\ y_2 = -\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right), y_3 = -\cos\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right).$$

Aus $\frac{p}{z^2} = \frac{3}{4}$ folgt aber $z = \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p}{3}}$, und daraus mit Hilfe der dritten Gleichung $\cos\varphi = -\frac{4q}{z^3} = \mp\frac{q}{2}\sqrt{\left(\frac{3}{p}\right)^3}$. Das obere oder untere Vorzeichen vor der Quadratwurzel ist zu wählen, je nachdem

q negativ oder positiv ist, damit für $\cos\varphi$ stets ein positiver Werth sich ergiebt.

Die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - px + q = 0$$

sind demnach

$$x_1 = yz = \pm 2 . \sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \cos\frac{\varphi}{3},\ x_2 = \mp 2. \sqrt{\frac{p}{3}} . \cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right),$$

$$x_3 = \mp 2 \sqrt{\frac{p}{3}} . \cos\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right),$$

wobei die Vorzeichen nach obiger Regel zu bestimmen sind.

Die Auflösung der gegebenen cubischen Gleichung besteht also darin, daß man zuerst aus

$$\cos\varphi = \mp \frac{q}{2} \sqrt{\left(\frac{3}{p}\right)^3}$$

φ berechnet und dann durch Einsetzung des Werthes für $\frac{\varphi}{3}$ die drei Werthe von x mit Hilfe der obigen Formeln ermittelt.

Beispiel. Die gegebene Gleichung sei

$$3x^3 - 12x^2 - 21x + 30 = 0 \text{ oder } x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0.$$

Es wird $y + \frac{4}{3}$ für x substituirt. Dann ist

$$\begin{aligned}
x^3 &= y^3 + 4y^2 + \frac{16}{3} y + \frac{64}{27} \\
-4x^2 &= \quad\ - 4y^2 - \frac{32}{3} y - \frac{64}{9} \\
-7x &= \qquad\qquad - 7y - \frac{28}{3} \\
+30 &= \qquad\qquad\qquad + 30 \\
\hline
0 &= y^3 \qquad - \frac{37}{3} y - \frac{110}{27}
\end{aligned}$$

Da der Coëfficient von y negativ ist, und da $\left(\frac{37}{9}\right)^3 > \left(\frac{55}{27}\right)^2$, d. h. da $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$ ist, so liegt der casus irreductibilis vor. Es ist also zu setzen

$$\cos\varphi = \frac{55}{27} \cdot \sqrt{\left(\frac{9}{37}\right)^3} = 55 \cdot \sqrt{\frac{1}{37^3}}.$$

Und daraus ergiebt sich $\varphi = 75^0\ 51'\ 18''$. Daher ist

$$y_1 = +2\sqrt{\frac{37}{9}} \cdot \cos 25^0 17' 6'';\ y_2 = -2\sqrt{\frac{37}{9}} \cos 34^0 42' 54'';\ y_3 = -2\sqrt{\frac{37}{9}} \cos 85^0 17' 6''$$

$$= +3\tfrac{2}{3};\qquad = -\ 3\tfrac{1}{3};\qquad = -\tfrac{1}{3};\ \text{mithin}$$

$$x_1 = +5;\qquad x_2 = -2;\qquad x_3 = +1.$$

E. Biquadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

§ 104 (Heis § 97—98).

Die Auflösung der biquadratischen Gleichung $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$ oder $x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$ reducirt sich auf die Auflösung von Gleichungen von niedrigeren Graden, wenn entweder der Coëfficient δ allein gleich 0 ist, oder wenn gleichzeitig die beiden Coëfficienten α und γ gleich 0, alle übrigen aber von 0 verschieden sind. Der Coëfficient δ in obiger Gleichung darf also nicht $= 0$ sein.

Besondere Beachtung verdienen folgende beiden Fälle:

1) Die drei Coëfficienten α, β, γ sind gleichzeitig gleich Null. In diesem Falle hat die Gleichung die Form $x^4 + \delta = 0$.

2) Einer der beiden Coëfficienten α oder γ ist gleich 0, die übrigen aber sind von Null verschieden. — Die Gleichung hat dann die Form

$$x^4 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0 \text{ oder } x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \delta = 0.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen kann eben so gut, wie die obige gegebene Gleichung, als die allgemeine Form einer biquadratischen Gleichung betrachtet werden, weil jede Gleichung 4. Grades durch passende Substitution so umgeformt werden kann, daß **der Coëfficient des den Cubus der Unbekannten enthaltenden Gliedes gleich 0 ist.** Denn die Gleichung

$$x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$$

kann auch so geschrieben werden:

$$\left(x + \frac{\alpha}{4}\right)^4 + \left(\beta - \frac{3}{8}\alpha^2\right)x^2 + \left(\gamma - \frac{\alpha^3}{16}\right)x + \delta - \frac{\alpha^4}{256} = 0.$$

Ersetzt man also $x + \frac{\alpha}{4}$ durch y, d. h. x durch $y - \frac{\alpha}{4}$, so geht die obige Gleichung über in

$$y^4 + \left(\beta - \frac{3}{8}\alpha^2\right)y^2 + \left(\gamma + \frac{\alpha^3}{8} - \frac{\alpha\beta}{2}\right)y + \left(\delta + \frac{3}{256}\alpha^4 - + \frac{\alpha^2\beta}{16} - \frac{\alpha\gamma}{4}\right) = 0,$$

oder:

$$y^4 + ay^2 + by + c = 0,$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$a = \beta - \frac{3}{8}\alpha^2;\ b = \gamma + \frac{\alpha^3}{8} - \frac{\alpha\beta}{2};\ c = \delta - \frac{3}{256}\alpha^4 + \frac{\alpha^2\beta}{16} - \frac{\alpha\gamma}{4}.$$

Wenn aber in der obigen allgemeinen Gleichung der Coëfficient $\gamma = 0$ ist, so kann man diese Umformung durch Substitution von $\frac{1}{y}$ statt x schneller erreichen. Es ergiebt sich alsdann:

$$\frac{1}{y^4} + \frac{\alpha}{y^3} + \frac{\beta}{y^2} + \delta = 0 \text{ oder } y^4 + \frac{\beta}{\delta}y^2 + \frac{\alpha}{\delta}y + \frac{1}{\delta} = 0.$$

Demnach sind nur folgende beiden Formen der Gleichungen 4. Grades

1. $x^4 + \delta = 0$ und
2. $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$

zu betrachten.

Im ersten Falle heißt die Gleichung eine reine biquadratische Gleichung. Ihre 4 Wurzeln sind die 4 Werthe von $\sqrt[4]{-\delta}$. Ihre Lösung wird in § 171 besprochen werden, da sie zu den sogenannten binomischen Gleichungen gehört.

Zur Lösung der reducirten biquadratischen Gleichung

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

setzt man $x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 + px + q)(x^2 - px + q_1)$. Durch Entwicklung des Produktes auf der rechten Seite und Gleichsetzung der Coëfficienten der gleich hohen Glieder erhält man zur Bestimmung der drei Coëfficienten p, q und q_1 die 3 Gleichungen:

$$q + q_1 - p^2 = a, \; p(q_1 - q) = b, \text{ und } q q_1 = c,$$

aus denen durch Elimination von q und q_1 folgende Gleichung als Resolvente der gegebenen biquadratischen Gleichung sich ergiebt:

$$p^6 + 2ap^4 + (a - 4c)p^2 - b^2 = 0.$$

Nachdem diese Gleichung gelöst, und die Werthe von q und q_1 aus den beiden ersten der obigen Gleichungen ermittelt sind, ist die Lösung der gegebenen reducirten Gleichung 4. Grades auf die Lösung der beiden quadratischen Gleichungen

$$x^2 + px + q = 0 \text{ und } x^2 - px + q_1 = 0$$

zurückgeführt.

Anmerkung 1. Je nachdem die Resolvente, welche stets eine positive Wurzel besitzt, einen oder drei reelle Werthe für p liefert, giebt es eine oder drei Zerlegungen der gegebenen biquadratischen Gleichung in ein Produkt von zwei quadratischen Factoren. Diese Methode der Lösung der biquadratischen Gleichungen ist von Descartes angegeben worden.

Zusatz 1. Die obige Reduction der allgemeinen biquadratischen Gleichung $x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$ ist zur Lösung der Gleichung nicht unbedingt nothwendig. Die Lösung gelingt auch z. B. durch die Substitution von $py + q$ für x, wobei die Größen p und q so zu bestimmen sind, daß die entstehende Gleichung eine reciproke ist. Zur Berechnung von q erhält man eine Gleichung 3. Grades (Resolvente).

Zusatz 2. Auch folgende Methode kann zu einer bequemen Lösung der allgemeinen biquadratischen Gleichung

$$x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$$

führen. Man giebt der Gleichung die Form

$$\left(x^2+\frac{\alpha}{2}x\right)^2=\left(\frac{\alpha^2}{4}-\beta\right)x^2-\gamma x-\delta,$$

addirt auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens $\left(x^2+\frac{\alpha}{2}x\right)\cdot p+\frac{p^2}{4}$ und bestimmt die Größe p so, daß die rechte Seite der entstehenden Gleichung

$$\left(x^2+\frac{\alpha}{2}x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{\alpha^2}{4}-\beta+p\right)x^2+\left(\frac{\alpha p}{2}-\gamma\right)x+\frac{p^2}{4}-\delta$$

ein vollständiges Quadrat wird. Das ist bekanntlich der Fall, wenn $4\cdot\left(\frac{\alpha^2}{4}-\beta+p\right)\left(\frac{p^2}{4}-\delta\right)=\left(\frac{\alpha p}{2}-\gamma\right)^2$ ist; und daraus folgt zur Bestimmung von p die Gleichung 3. Grades (die Resolvente)

$$p^3-\beta p^2+(\alpha\gamma-4\delta)\,p-(\alpha^2\delta-4\beta\delta+\gamma^2)=0.$$

Hat man hieraus p bestimmt, so läßt sich die gegebene Gleichung in der Form der Differenz zweier Quadrate schreiben; diese Differenz kann nur gleich Null sein, wenn einer ihrer Factoren gleich Null ist, d. h. wenn entweder

$$\left\{x^2+\frac{\alpha}{2}x+\frac{p}{2}\right\}+\left\{x\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta+p}+\frac{\alpha p-2\gamma}{4\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta+p}}\right\}=0$$

oder wenn

$$\left\{x^2+\frac{\alpha}{2}x+\frac{p}{2}\right\}-\left\{x\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta+p}+\frac{\alpha p-2\gamma}{4\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta+p}}\right\}=0 \text{ ist.}$$

Die 4 Wurzeln dieser beiden quadratischen Gleichungen in x sind die Wurzeln der gegebenen biquadratischen Gleichung.

Anmerkung 2. Offenbar ist diese letztere, von Ferrari angegebene Methode sehr bequem, wenn zwischen den Coëfficienten der gegebenen Gleichung die Bedingung besteht, daß

$$4\cdot\left(\beta-\frac{\alpha^2}{4}\right)\cdot\delta=\gamma^2 \text{ ist.}$$

Zusatz 3. In dem Specialfalle, daß zwischen den Coëfficienten die Bedingung besteht, daß $\beta-\frac{\alpha^2}{4}=\frac{2\gamma}{\alpha}$ ist, kann man die Gleichung 4. Grades $x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$ auf folgende Form bringen:

$$\left(x^2+\frac{\alpha}{2}x\right)^2+\frac{2\gamma}{\alpha}\left(x^2+\frac{\alpha}{2}x\right)+\delta=0.$$

Und diese quadratische Gleichung läßt sich leicht lösen und wird zur Bestimmung der 4 Werthe von x führen.

F. Unbestimmte Gleichungen des ersten Grades.

§ 105 [§ 98].

Eine Gleichung des ersten Grades mit 2 Unbekannten, wie z. B.

$$ax + by = c,$$

hat unendlich viele Auflösungen, da man eine der Unbekannten beliebig wählen und dann für jeden gewählten Werth derselben den zugehörigen der zweiten Unbekannten berechnen kann. Stellt man aber die Bedingung, daß x und y ganze Zahlen sein sollen, während gleichzeitig auch a, b und c ganze Zahlen sind, so fallen unendlich viele Lösungen aus, und die immer noch unbegrenzte Zahl der übrig bleibenden läßt sich in einer allgemeinen Form zusammenfassen. Soll die Aufgabe möglich sein, so muß jeder gemeinschaftliche Theiler von a und b auch ein Theiler von c sein, da eine ganze Zahl nicht gleich einem Bruche sein kann. Ist diese Bedingung erfüllt, so kann man die ganze Gleichung durch den größesten gemeinsamen Theiler von a und b dividiren, ohne das Wesen der Gleichung zu ändern. Die Aufgabe verliert also nichts von ihrer Allgemeinheit, wenn man voraussetzt, daß a und b keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, d. h. relative Primzahlen sind. Unter den vorstehenden Beschränkungen heißt die obige Gleichung eine Diophantische (Diophantus). Die Art ihrer Auflösung, ausgedehnt auf mehrere Gleichungen, deren Zahl kleiner ist, als die der Unbekannten, wird später bei der Lehre von den Kettenbrüchen erörtert werden.

G. Von der Synthesis der algebraischen Gleichungen.

§ 106 [§ 99] (Heis § 63, 67, 71, 75).

Oft ist die Bedingungsgleichung, mit deren Hilfe eine unbekannte Größe berechnet werden soll, nicht unmittelbar in arithmetischer Form gegeben, sondern erst nach den Bedingungen einer in Worten gegebenen Aufgabe zu bilden. Bei dieser Umsetzung quantitativer Bestimmungen in die abstracte Form, der sogenannten Ansatzbildung, hat man zunächst die in der Aufgabe liegende Gleichung in möglichst knapper, für arithmetische Fassung geeigneter Form (Wortgleichung) herauszulösen. Ist dieses geschehen, so hat man weiter diejenigen Größen, welche ihrem Werthe nach zu bestimmen sind, aufzusuchen und durch die letzten Buchstaben des Alphabetes x, y, z ...... zu bezeichnen, dann die in der Wortgleichung enthaltenen quantitativen Bestimmungen durch die Unbekannten und die bekannten Größen auszudrücken, die verlangten Beziehungen zwischen den-

selben durch arithmetische Rechnungen und schließlich die in Worten ausgesprochene Gleichheit durch das Gleichheitszeichen darzustellen. Soll die Aufgabe eine bestimmte sein, so muß die Zahl der gewonnenen unabhängigen Gleichungen der Zahl der Unbekannten gleich sein; ist sie geringer, so ist die Aufgabe unbestimmt, und hat nur dann einen Sinn, wenn eine Diophantische Gleichung resultirt; ist sie größer, so ist die Aufgabe unmöglich. Wenn die angesetzte Gleichung gelöst ist, so hat man die gefundenen Wurzeln dahin zu prüfen, ob nach dem Zusammenhange der Gleichung alle einen Sinn geben, oder nicht, was besonders für quadratische Gleichungen gilt.

Da die Ansatzbildung eine mit der Natur der eingekleideten Aufgaben wechselnde Verstandesthätigkeit erfordert, so unterliegt sie keinen allgemeingiltigen näheren Regeln, als vorstehend angedeutet sind. Für bestimmte Gruppen von Aufgaben nimmt sie jedoch vortheilhaft einen bestimmt schematisirten Gang, welcher im Folgenden durch einzelne Beispiele erläutert werden soll.

§ 107 [§ 100].

1) Rabattgleichungen.

Aufgabe 1. Für ein Gut bietet A eine gewisse Summe, von welcher er a Mk. baar und den Rest nach n Jahren oder baar mit p % Rabatt auf Hundert pro Jahr bezahlen will. B bietet a_1 Mk. baar und c Mk. weniger, als der Rest des A beträgt, nach n_1 Jahren oder baar ebenso mit p_1 % Rabatt. Wenn nun das erste Gebot um d Mk. vortheilhafter ist als das zweite, wie groß ist ersteres?

Wortgleichung.

Der baare Werth des Gebotes des A ist gleich dem baaren Werthe des Gebotes des B, vermehrt um d Mk.

Ist x das ganze Gebot des A, so sind seine Theile a und (x—a), während die des zweiten sind a_1 und $(x - a - c)$. Der zweite Theil des ersten Gebotes ist zu p % auf Hundert zu rabattiren, also sind

$$(100 + pn) \text{ Mk. Soll} = 100 \text{ Mk. baar, also}$$

$$(x - a) \text{ Mk. Soll} = \frac{100\,(x - a)}{100 + pn} \text{ Mk. baar.}$$

Daher ist der baare Werth des ganzen Gebotes $= \left(a + \frac{100\,(x - a)}{100 + pn}\right)$ Mk.

Analog ist der baare Werth des zweiten Gebotes

$$a_1 + \frac{100\,(x - a - c)}{100 + p_1 n_1}.$$

Die obige Wortgleichung giebt demnach folgende

Gleichung:

$$a + \frac{100(x-a)}{100+pn} = a_1 + \frac{100(x-a-c)}{100+p_1 n_1}.$$

Aufgabe 2. N verkauft 2 Stücke einer Waare, das eine für a, das andere für b Mk. Wird bei baarer Zahlung für das erste Stück p % Rabatt in Hundert weniger gewährt, als für das zweite, so wird dieselbe für beide Stücke gleich groß. Zu wie viel Procent ist jedes zu rabattiren?

Wortgleichung.

Der baare Werth der ersten Zahlung ist gleich dem baaren Werthe der zweiten.

Wird die erste zu x % rabattirt, so heißt das

100 Mk. Soll = (100 — x) Mk. baar, also

a Mk. Soll = $\frac{(100-x)a}{100}$ Mk. baar.

Für das zweite Gebot sind die Rabattprocente (x + p), also ist sein baarer Werth ebenso

$$= \frac{(100-x-p)\,b}{100}.$$

Die obige Wortgleichung giebt also die

Gleichung:

$$\frac{a(100-x)}{100} = \frac{b(100-x-p)}{100}.$$

2) Terminrechnung.

Aufgabe. Eine gewisse Summe soll in drei Terminen bezahlt werden; nämlich der erste Theil im Betrage von a_1 Mk. nach n_1 Monaten, der zweite Theil im Betrage von a_2 Mk. n_2 Monate später, und der Rest n_3 Monate nach der zweiten Zahlung. Wie groß ist die ganze Summe, wenn sie statt in drei Terminen auch auf einmal nach m Monaten gezahlt werden kann?

Streng richtig ist bei allen derartigen Aufgaben nur folgende

Wortgleichung.

Die Summe der baaren Werthe der auf Hundert rabattirten Terminzahlungen ist gleich dem baaren Werthe der ebenso rabattirten ganzen Zahlung. Ueblich ist aber bei der Kürze der Zeit die Rabattirung in Hundert.

Ist nun x die ganze Zahlung, so sind die Terminzahlungen a_1 Mk., a_2 Mk. und $(x - a_1 - a_2)$ Mk.; wird zu p % in Hundert pro Monat

rabattirt, so ist der baare Werth der für n_1 Monate rabattirten ersten Zahlung

$$= \frac{(100 - pn_1)\, a_1}{100}.$$

Der baare Werth der für $(n_1 + n_2)$ Monate rabattirten zweiten Zahlung ist ebenso

$$= \frac{[100 - p\,(n_1 + n_2)]\, a_2}{100},$$

der der dritten $= \frac{[100 - p\,(n_1 + n_2 + n_3)]\,(x - a_1 - a_2)}{100}$,

und der der ganzen Zahlung bei Bezahlung in einem Termine nach m Monaten $\frac{(100 - pm)\,x}{100}$;

also giebt die Wortgleichung folgende

Gleichung:

$$\frac{(100 - pn_1)\, a_1}{100} + \frac{[100 - p\,(n_1 + n_2)]\, a_2}{100} + \frac{[100 - p\,(n_1 + n_2 + n_3)]\,(x - a_1 - a_2)}{100} = \frac{(100 - pm)\,x}{100},$$

oder

$$a_1 - \frac{a_1}{100} pn_1 + a_2 - \frac{a_2}{100} p\,(n_1 + n_2) + x - a_1 - a_2 - \frac{x - a_1 - a_2}{100} p \cdot (n_1 + n_2 + n_3) = x - \frac{x}{100} \cdot pm,$$

oder

$$+ \frac{a_1}{100} pn_1 + \frac{a_2}{100} p\,(n_1 + n_2) + \frac{x - a_1 - a_2}{100} p\,(n_1 + n_2 + n_3) = + \frac{x}{100} pm.$$

Da nun die übrig gebliebenen Addenden links die Zinsen der Terminzahlungen zu p % pro Monat, und das Glied rechts die Zinsen der ganzen Zahlung sind, so bildet man bei allen Aufgaben über Terminrechnung den Ansatz von vornherein aus der Wortgleichung:

Die Zinsen der ganzen Zahlung sind gleich der Summe der Zinsen der einzelnen Terminzahlungen zu demselben Zinsfuß.

Die obige Gleichung kann durch p dividirt werden, also braucht der Zinsfuß in der Aufgabe nicht gegeben zu sein, sondern wird nur zur Bildung des Ansatzes eingeführt.

3) Compagniegeschäft.

Aufgabe. Zu einem Geschäft giebt C c Mk., A aber a Mk. weniger als B. A läßt seinen Antheil m, B n, C p Monate lang im

Geschäft. Wenn nun von s Mk. Totalgewinn auf B b_1 Mk. kommen, wie groß ist die Einlage des A und B?

Princip zur Bildung der Gleichung.

Die einzelnen Gewinnantheile verhalten sich unter einander oder zum ganzen Gewinne, wie die entsprechenden, auf gleiche Zeiten reducirten Einlagen.

Legt A x Mk. auf m Monate, oder mx Mk. auf einen Monat ein, so beträgt die Einlage des B $(x + a)$ Mk. auf n Monate oder $n(x + a)$ Mk. auf 1 Monat, die des C ebenso cp Mk. auf 1 Monat. Demnach ist die Totaleinlage für 1 Monat $= mx + n(x + a) + cp$ Mk., also hat man die

Proportion

$$s : b = mx + nx + an + cp : nx + an,$$ und daher die

Gleichung:

$$s(nx + an) = b \cdot (mx + nx + an + cp).$$

4) Mischungsgleichungen.

Aufgabe 1. Wie viel a löthiges Silber muß zu n Gewichtseinheiten c löthigen Silbers hinzugefügt werden, damit die Mischung b löthig wird?

Wortgleichung.

Der Silbergehalt der Mischung ist gleich der Summe aus dem Silbergehalte der einzelnen Bestandtheile.

Ist x die Anzahl der Gewichtstheile des a löthigen Silbers, so ist, da in 16 Loth Mischung a Loth Silber enthalten sind, ihr Silbergehalt $= x \cdot \frac{a}{16}$; der Silbergehalt des c löthigen Silbers ist $= n \cdot \frac{c}{16}$, der der $(x + n)$ Gewichtseinheiten der Mischung $= (x + n) \cdot \frac{b}{16}$. Also giebt die Wortgleichung folgende

Gleichung:

$$\frac{ax}{16} + \frac{cn}{16} = \frac{b \cdot (x + n)}{16} \text{ oder } ax + cn = b \cdot (x + n).$$

Aufgabe 2. Wie viel preußische Thaler, von denen 14 auf die feine Mark gehen, und deren Feingehalt $\frac{3}{4}$ ist, und wie viel Silbergroschen, von denen 480 auf die feine Mark gehen, und deren Feingehalt $\frac{2}{9}$ ist, müssen zusammengeschmolzen werden, um 31920 $\frac{1}{6}$-Thalerstücke zu erhalten, deren 84 auf die feine Mark gehen, und deren Feingehalt $= \frac{25}{48}$ ist?

Wortgleichung:

1) Der Feingehalt der gesammten $\frac{1}{6}$-Thalerstücke ist = der Summe des Feingehaltes der Thaler und des Feingehaltes der Groschen.
2) Das Bruttogewicht der gesammten $\frac{1}{6}$-Thalerstücke ist ebenso = der Summe der Bruttogewichte.

Da 14 Thaler auf die feine Mark gehen, so enthalten x Th. $\frac{x}{14}$ Mark oder $\frac{8x}{7}$ Loth Silber; ebenso enthalten die y Groschen $\frac{y}{30}$ Loth Silber, und die 31920 $\frac{1}{6}$-Thalerstücke $31920 \cdot \frac{16}{84} = 6080$ Loth Silber; also ist die erste Gleichung:

$$\frac{8x}{7} + \frac{y}{30} = 6080.$$

Da der Feingehalt der Thaler $\frac{3}{4}$ ist, so repräsentiren die $\frac{8x}{7}$ Loth Korngewicht $\frac{8x}{7} \cdot \frac{4}{3} = \frac{32x}{21}$ Loth Brutto oder Schrotgewicht, ebenso ist das zweite Bruttogewicht $= \frac{y}{30} \cdot \frac{9}{2} = \frac{3y}{20}$, das dritte $6080 \cdot \frac{48}{25} = \frac{58368}{5}$, also ist die 2. Gleichung:

$$\frac{32}{21}x + \frac{3y}{20} = \frac{58368}{5}.$$

Aufgabe 3. Zu m Gewichtseinheiten eines Körpers vom specifischen Gewichte s soll soviel von einem anderen Körper mit dem specifischen Gewichte s_2 zugesetzt werden, daß die Mischung das specifische Gewicht s_1 hat.

Wortgleichung.

Der Gewichtsverlust der Mischung in Wasser ist gleich der Summe der Gewichtsverluste der Bestandtheile.

Da das absolute Gewicht des ersten Bestandtheiles m, und sein specifisches Gewicht s ist, so ist sein Gewichtsverlust nach physikalischen Gesetzen $= \frac{m}{s}$; ist nun das absolute Gewicht das zweiten Bestandtheiles x, und also das der Mischung m + x, so sind die entsprechenden Gewichtsverluste $\frac{x}{s_2}$ und $\frac{m+x}{s_1}$; also besteht die

Gleichung:

$$\frac{m}{s} + \frac{x}{s_2} = \frac{m+x}{s_1}.$$

5) Bewegungsgleichungen.

Aufgabe. Ein Körper bewegt sich von A nach dem um d Län-

geneinheiten entfernten Orte B, m Zeiteinheiten später ein anderer von B nach A. Nach n Zeiteinheiten kommt der erste in B, nach n_1 Zeiteinheiten der zweite in A an. Wann und in welcher Entfernung von A treffen sie sich?

Wortgleichung.

Die Summe der Wege im Moment des Zusammentreffens ist gleich der Entfernung der beiden Orte.

Der erste legt in n Zeiteinheiten d Längeneinheiten, also in einer Zeiteinheit $\frac{d}{n}$ Längeneinheiten zurück, d. h. seine Geschwindigkeit ist $\frac{d}{n}$; der zweite braucht zu demselben Wege n_1 Zeiteinheiten, also ist seine Geschwindigkeit $\frac{d}{n_1}$. Ist nun der erste bis zum Momente des Zusammentreffens x Zeiteinheiten unterwegs, so kommen auf den zweiten nur (x—m) Zeiteinheiten, daher sind die beiden Wege $x\frac{d}{n}$ und $(x-m)\frac{d}{n_1}$; also besteht die

Gleichung:

$$x \cdot \frac{d}{n} + (x-m)\frac{d}{n_1} = d \text{ oder } \frac{x}{n} + \frac{x-m}{n_1} = 1.$$

Anmerkung. An Stelle der Summe der Wege tritt die Differenz, wenn die Richtung beider Wege dieselbe ist. Oft wird auch die Gleichung nicht aus den Wegen, sondern aus den aufgewandten Zeiten gebildet.

IX. Kapitel.

Von den einfachen Reihen und ihrer Anwendung auf Zinseszins- und Rentenrechnung.

§ 108 [§ 101].

Unter einer Reihe oder Progression versteht man in der Mathematik eine jede gesetzmäßige Folge von Zahlen. Die Zahlen, welche die Reihe bilden, heißen ihre Glieder und werden von links nach rechts gezählt, so daß jedes Glied seinen bestimmten Stellenzeiger oder Index hat. Das erste Glied der Reihe heißt das Anfangsglied, das Glied mit dem Index n heißt das allgemeine Glied, weil es für Specialwerthe von n jedes Glied vertreten kann. Die Reihe heißt steigend oder fallend, je nachdem die Glieder allmälig immer größer oder kleiner werden; sie heißt endlich oder unendlich, je nachdem die Gliederzahl begrenzt oder unbegrenzt ist. Die Summe aller Glieder vom Anfangsgliede bis zum allgemeinen Gliede heißt das summirende Glied und wird mit s_n oder s bezeichnet.

Arithmetische Progressionen 1. Ordnung.

§ 109 [§ 102] (Heis § 81. 82).

Eine arithmetische Reihe 1. Ordnung ist eine solche Reihe, in welcher der Unterschied je zweier aufeinanderfolgenden Glieder constant ist, oder, in der je 3 aufeinanderfolgende Glieder eine stetige arithmetische Proportion bilden, also jedes Glied das arithmetische Mittel zwischen dem vorhergehenden und dem nachfolgenden Gliede ist. Wenn man die constante Differenz mit d, das Anfangsglied mit a bezeichnet, so ist die allgemeine Form der Reihe:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \cdots\cdots,\ a+nd;$$

ist d positiv, so ist die Progression steigend; ist d negativ, so ist sie fallend.

Bezeichnet man das allgemeine oder n^{te} Glied mit z, so ist, wie man leicht erkennt,

1) $$z = a + (n-1)\,d;$$

ferner ist das summirende Glied

$$s_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (z-2d) + (z-d) + z$$
$$s_n = z + (z-d) + (z-2d) + \cdots + (a+2d) + (a+d) + a$$

$2s_n = n\,(a+z)$, also ist

2) $$s_n = (a+z)\cdot\frac{n}{2}.$$

Zusatz 1. Aus dieser Entwicklung des summirenden Gliedes einer arithmetischen Reihe ergiebt sich, daß die Summe je zweier, vom Anfang und Ende gleich weit entfernten Glieder einer arithmetischen Reihe 1. Ordnung constant, nämlich gleich der Summe des ersten und letzten Gliedes ist.

Zusatz 2. Substituirt man für z seinen Werth aus Gleichung 1), so ist

$$s_n = \{2a + (n-1)\,d\}\frac{n}{2}.$$

Zusatz 3. Die Summe der n ersten natürlichen Zahlen ist $= (n+1)\,\frac{n}{2}$, die der n ersten geraden Zahlen $= 2\,(n+1)\,\frac{n}{2}$ $= n\,(n+1)$, die der n ersten ungeraden Zahlen $= (1+2n-1)\,\frac{n}{2} = n^2$.

Zusatz 4. In den beiden Gleichungen

$$z = a + (n-1)\,d$$
$$s_n = (a+z)\cdot\frac{n}{2}$$

kommen 5 Größen vor; da nun aus 2 Gleichungen sich nur 2 Unbekannte berechnen lassen, so müssen stets 3 der Größen gegeben sein, da-

mit alle gegeben sind. Das Auffinden der fehlenden ist ein einfaches Eliminiren.

Geometrische Progressionen 1. Ordnung.

§ 110 [§ 103] (Heis § 83. 84).

Eine geometrische Progression 1. Ordnung ist eine solche Reihe, in welcher der Quotient je zweier aufeinanderfolgenden Glieder constant ist, oder in der je 3 aufeinanderfolgende Glieder eine stetige geometrische Proportion bilden, also jedes Glied das geometrische Mittel zwischen dem vorhergehenden und dem nachfolgenden Gliede ist. Wenn der constante Quotient $= e$ ist, so ist die allgemeine Form der Progression

$$a,\ ae,\ ae^2,\ ae^3,\ \cdots\cdots,\ ae^n;$$

ist $e > 1$, so ist die Progression steigend; ist $e < 1$, so ist sie fallend.

Bezeichnet man das allgemeine Glied mit z, so ist

1) $$z = a \cdot e^{n-1}.$$

Ferner ist

$$s_n = a + ae + ae^2 + ae^3 + \cdots\cdots + ae^{n-1}$$

also: $$es_n = \quad ae + ae^2 + ae^3 + \cdots\cdots + ae^{n-1} + ae^n;$$ daher

ist $s_n - es_n = s_n \cdot (1-e) = a \qquad - ae^n = a(1-e^n)$, also

2) $s_n = a \cdot \frac{1-e^n}{1-e}$, wenn $e < 1$ ist, oder $s_n = a \cdot \frac{e^n-1}{e-1}$, wenn $e > 1$ ist.

Zusatz 1. Ist $e < 1$, und wird n unendlich groß, so ist e^n unendlich klein, daher

$$s = \frac{a}{1-e} - \frac{ae^n}{1-e} = \frac{a}{1-e};$$

dieses ist also die Summe der unendlichen fallenden Progression.

Als ein Specialfall einer unendlichen fallenden geometrischen Progression mit dem Anfangsgliede ae und dem Exponenten e ist jeder echte reinperiodische Decimalbruch anzusehen; die Zahl a stellt die Periode, und die Zahl e die sovielte Potenz von $\frac{1}{10}$ dar, als die Periode Ziffern hat. Jeder reinperiodische Decimalbruch kann demnach auch mit Hilfe dieser Summenformel $s = \frac{a}{1-e}$ in einen gemeinen Bruch verwandelt werden.

Zusatz 2. Setzt man in der Formel

$$s_n = a + ae + ae^2 + ae^3 + \cdots\cdots + ae^{n-1} = \frac{a(1-e^n)}{1-e}$$

1 statt des Anfangsgliedes a und $\frac{b}{a}$ statt e, so ist

$$1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} + \cdots\cdots + \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}} = \frac{1 - \frac{b^n}{a^n}}{1 - \frac{b}{a}} = \frac{a^n - b^n}{a^{n-1}(a-b)},$$ oder

nach Multiplikation mit a^{n-1}

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + a^{n-4}b^3 + \cdots\cdots + ab^{n-2} + b^{n-1} = \frac{a^n - b^n}{a-b}.$$

Specielle Fälle dieser Formel sind (vergl. § 39 Zusatz 2):

$$\frac{a^2-b^2}{a-b} = a + b; \qquad \frac{a^2-b^2}{a+b} = a - b;$$

$$\frac{a^3-b^3}{a-b} = a^2 + ab + b^2; \qquad \frac{a^3+b^3}{a+b} = a^2 - ab + b^2;$$

$$\frac{a^4-b^4}{a-b} = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3; \qquad \frac{a^4-b^4}{a+b} = a^3 - a^2b + ab^2 - b^3;$$

$$\frac{a^5-b^5}{a-b} = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4; \qquad \frac{a^5+b^5}{a+b} = a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4;$$

u. s. w. u. s. w.

Zusatz 3. In den beiden Gleichungen

$$z = a \cdot e^{n-1}$$

$$s = \frac{a(e^n - 1)}{e-1}$$

kommen ebenfalls 5 Größen vor, also müssen auch hier stets 3 gegeben sein, damit alle bekannt sind. Die Elimination ist hier oft schwieriger, z. B.

Fall 1. Gegeben a, e, n, gesucht z, s. $z = a \cdot e^{n-1}$;

$$s = \frac{a(e^n - 1)}{e-1}.$$

Fall 2. Gegeben a, e, z, gesucht n, s.

$$\lg z = \lg a + (n-1)\lg e,$$

also $n = \dfrac{\lg z - \lg a}{\lg e} + 1$;

$$ze = ae^n$$

$$s(e-1) = ae^n - a.$$

$$ze - s(e-1) = a, \quad s = \frac{ze - a}{e-1}.$$

Fall 3. Gegeben a, e, s, gesucht z, n.

$e^n = \dfrac{s(e-1)}{a} + 1$, also $ze = ae^n = a + s(e-1)$

$$z = \frac{a + s(e-1)}{e};$$

$$n \cdot \lg e = \lg \frac{s(e-1) + a}{a} = \lg [s(e-1) + a] - \lg a$$

$$n = \frac{\lg [s(e-1) + a] - \lg a}{\lg e}.$$

Fall 4. Gegeben a, z, n, gesucht e, s.

$\lg e = \frac{\lg z - \lg a}{n-1}$ giebt e; s muß durch Substitution des Werthes von e berechnet werden.

Fall 5. Gegeben a, z, s, gesucht e, n.

$$ze - se + s = a$$

$$e = \frac{s-a}{s-z};\ \text{dann}\ n = \frac{\lg z - \lg a}{\lg e} + 1.$$

Fall 6. Gegeben a, n, s, gesucht e, z.

$\frac{e^n - 1}{e-1} - \frac{s}{a} = 0$ giebt e; also ist die Lösung der Aufgabe nur dann möglich, wenn diese Gleichung noch auflösbar ist.

Fall 7. Gegeben e, n, z, gesucht a, s.

$$a = \frac{z}{e^{n-1}};\qquad s = z \cdot \frac{e^n - 1}{e^{n-1}(e-1)}.$$

Fall 8. Gegeben e, n, s, gesucht a, z.

$$a = \frac{s(e-1)}{e^n - 1};\qquad z = \frac{s \cdot (e-1) \cdot e^{n-1}}{e^n - 1}.$$

Fall 9. Gegeben z, n, s, gesucht a, e.

$$\frac{s}{z} = \frac{e^n - 1}{e^{n-1} \cdot (e-1)},\ \text{daher}$$

$$\frac{e^n - 1}{e-1} - \frac{s}{z}\, e^{n-1} = 0 \text{ giebt } e, \text{ also wie in 6.}$$

Anmerkung. n muß natürlich stets eine ganze Zahl sein.

Zinseszins- und Rentenrechnung.

§ 111 [§ 104] (Heis § 84).

Die Zinseszinsrechnung oder zusammengesetzte Zinsrechnung beschäftigt sich mit der Berechnung der Vermehrung eines auf Zinsen ausgeliehenen Kapitales in dem Falle, daß die Zinsen an jedem Termine, wo sie fällig sind, nicht ausgezahlt, sondern zum Kapitale geschlagen und mit ihm verzinset werden.

Ist nun c_0 der Anfangswerth des ausgeliehenen Kapitales, und steht dasselbe zu p%, fällig am Ende jedes Jahres, so wird aus ihm am Ende des ersten Jahres

$$c_0 + \frac{c_0}{100}\, p = c_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = c_1.$$

Aus diesem wird, da es im zweiten Jahre zu p% aussteht, am Ende desselben

$$c_1\left(1+\frac{p}{100}\right)=c_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2=c_2.$$

Ebenso ist $c_3=c_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^3$, und also allgemein

$$c_n=c_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$

oder, wenn der Ausdruck $1+\frac{p}{100}$, der sogenannte Verzinsungs-factor, mit q bezeichnet wird,

1) $$c_n=c_0q^n.$$

Anmerkung. In vorstehender Formel muß n eine ganze Zahl sein; ist n eine gemischte Zahl $= m+\frac{r}{s}$, so ist zunächst

$c_m=c_0q^m$ und hieraus durch einfache Verzinsung

$$c_n=c_m\left(1+\frac{rp}{100s}\right)=c_0q^m\left(1+\frac{rp}{100s}\right).$$

Zusatz 2. Aus der Hauptformel folgt

$$c_0=\frac{c_n}{q^n},$$

die sogenannte Discontirungsformel, da sie den gegenwärtigen Werth eines erst nach n Jahren fälligen Kapitales bei Zinseszinsen angiebt. — Weiter folgt $\lg q=\frac{\lg c_n-\lg c_0}{n}$, eine Formel, welche q und also auch $p=100(q-1)$ giebt, wenn c_0, c_n und n gegeben sind. — Endlich ergiebt sich $n=\frac{\lg c_n-\lg c_0}{\lg q}$, eine Formel, aus welcher die Zeit berechnet wird; geht die Division nicht auf, so giebt sie nur die ganzen Jahre, und wenn man die ganze Zahl für m einsetzt, erhält man den Bruch $\frac{r}{s}$ aus

$$c_n=c_0q^m\left(1+\frac{rp}{100s}\right).$$

§ 112 [§ 105].

Werden die Zinsen nicht am Ende jedes Jahres zum Kapitale geschlagen, sondern halbjährlich, vierteljährlich u. s. w., so wird

$$q=1+\frac{p}{200},=1+\frac{p}{400}\text{ u. s. w.},$$

und die Zahl n ist auch in halben Jahren, Vierteljahren u. s. w. auszudrücken.

§ 113 [§ 106].

Wird das Kapital außer durch die Zinsen am Ende des ersten und

jedes folgenden Jahres noch um ein constantes Kapital a vermehrt, so giebt die Formel

$c_1 = c_0 q + a$ das Kapital am Ende des 1. Jahres;

$c_2 = c_0 q^2 + aq + a$ „ „ „ „ „ 2. „ ;

$c_3 = c_0 q^3 + aq^2 + aq + a$ „ „ „ „ „ 3. „ ;

u. s. w.

$c_n = c_0 q^n + aq^{n-1} + aq^{n-2} + aq^{n-3} + \cdots + aq + a$ d. K. a. E. d. n. Jahres.

$= c_0 q^n + a \cdot \left(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots\cdots + q + 1\right).$

$$2) \qquad c_n = c_0 q^n + a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Für $c_0 = a$ ist $c_n = a \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$

Zusatz. Wird die Summe a nicht zugelegt, sondern weggenommen, so ist

$$2^a) \qquad c_n = c_0 q^n - a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Dieses ist der Fall bei der sogenannten Amortisation eines zu Zinseszinsen geliehenen Kapitales oder einer Anleihe durch jährliche Abzahlungen. Bei voller Amortisation muß das Endkapital $c_n = 0$ sein, also muß

$$0 = c_0 q^n - a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ oder } c_0 q^n = \frac{a \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \text{ oder } a = \frac{c_0 q^n (q - 1)}{q^n - 1}$$

sein; hieraus folgt:

$$c_0 q^n (q - 1) = aq^n - a, \text{ also}$$

$$a = \{a - c_0 (q - 1)\} \cdot q^n \text{ und}$$

$$\lg a = \lg \{a - c_0 (q - 1)\} + n \cdot \lg q, \text{ daher}$$

$$n = \frac{\log a - \lg [a - c_0 (q - 1)]}{\lg q}.$$

Da der Logarithmus einer negativen Zahl imaginär ist, so muß, damit n reell wird, $a > c_0 (q - 1)$, oder $a > c_0 q - c_0$, oder $a > c_1 - c_0$, d. h. größer als die Zinsen des ersten Jahres sein.

§ 114 [§ 107].

Unter einer Rente versteht man ein Kapital, welches in constanten oder nach einem bestimmten Gesetze veränderlichen Raten in gewissen periodischen Zeitterminen verfügbar wird. Der baare Werth der Rente zu einer gewissen Zeit ist der Kapitalwerth, welchem die Rente in diesem Zeitpunkte gleich zu achten ist, welcher also, wenn er von diesem Zeit-

punkte an bis zu dem Zeitpunkte, wo die Rente zum letzten Male fällig ist, auf Zinseszinsen ausgeliehen wird, denselben Endwerth giebt, wie die nach demselben Gesetze verzinsten Einzelrenten zusammen. Ist r die jährlich praenumerando fällige Rente, welche heute zum ersten Male und dann regelmäßig jährlich noch (n — 1) mal gezahlt werden muß, so giebt sie, wenn q der Verzinsungsfactor ist,

$$r\cdot\left(q^{n-1}+q^{n-2}+\cdots\cdots+1\right)=r\,\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Ist b der baare Werth derselben am heutigen Tage, so giebt er bei gleicher Verzinsung $b\cdot q^{n-1}$, also ist:

$$b\cdot q^{n-1}=r\cdot\frac{q^n-1}{q-1} \text{ oder}$$

$$3)\qquad b=r\cdot\frac{q^n-1}{q^{n-1}(q-1)} \text{ und } r=\frac{b\cdot q^{n-1}\cdot(q-1)}{q^n-1}.$$

§ 115 [§ 108].

Wenn die Rente heute über m Jahre zum ersten Male und dann noch (n—1) mal in Jahresterminen fällig ist, und wenn b wieder den heutigen Werth bezeichnet, so hat man:

$$b\cdot q^{m+n-1}=r\cdot\frac{q^n-1}{q-1}, \text{ also } b=\frac{r\cdot(q^n-1)}{q^{m+n-1}(q-1)}.$$

Ist speciell m = 1, also die Rente postnumerando fällig, so ist

$$b=\frac{r\cdot(q^n-1)}{q^n\cdot(q-1)}.$$

Wenn aber die Rente nicht constant, sondern in arithmetischer Progression veränderlich ist, so daß sie successive den Werth r, r + d, r + 2d u. s. w. hat, und wenn sie praenumerando sogleich fällig ist, so ist:

$$b\cdot q^{n-1}=\frac{r\cdot(q^n-1)}{q-1}+d\cdot\frac{q^{n-1}-1}{q-1}+d\cdot\frac{q^{n-2}-1}{q-1}+\cdots+d$$

$$=\frac{r\cdot(q^n-1)}{q-1}+\frac{d}{q-1}\left\{q^{n-1}+q^{n-2}+\cdots+q-(n-1)\right\}$$

$$=\frac{r\cdot(q^n-1)}{q-1}+\frac{d}{q-1}\cdot\left\{q\cdot\frac{q^{n-1}-1}{q-1}-(n-1)\right\}$$

$$b=\frac{r\cdot(q^n-1)}{q^{n-1}(q-1)}+\frac{d}{q^{n-1}\cdot(q-1)}\left\{q\cdot\frac{q^{n-1}-1}{q-1}-(n-1)\right\}.$$

Ist endlich die Rente in geometrischer Progression veränderlich, hat sie also successive den Werth r, re, re^2 u. s. w., so ist

$$b \cdot q^{n-1} = r \cdot q^{n-1} + re \cdot q^{n-2} + re^2 \cdot q^{n-3} + \cdots + r \cdot e^{n-1}$$
$$= r \cdot q^{n-1}\left(1 + \frac{e}{q} + \frac{e^2}{q^2} + \cdots + \frac{e^{n-1}}{q^{n-1}}\right)$$
$$= r \cdot q^{n-1} \frac{\left(\frac{e}{q}\right)^n - 1}{\frac{e}{q} - 1}$$

$$b = r \cdot \frac{\left(\frac{e}{q}\right)^n - 1}{\frac{e}{q} - 1}.$$

X. Kapitel.

Von den Kettenbrüchen.

§ 116 [§ 109] (Heis § 85—87).

Ein Kettenbruch ist eine derartige Verkettung von Brüchen, daß jeder Bruch mit dem Nenner des vorhergehenden durch Addition oder Subtraction verbunden ist. Sind $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3} \ldots\ldots$ die einzelnen Brüche, die sogenannten Gliedbrüche (Gliedzähler, Gliednenner), so ist die Form des Kettenbruches

$$\cfrac{p_1}{q_1 \pm \cfrac{p_2}{q_2 \pm \cfrac{p_3}{q_3 \pm \cfrac{p_4}{q_4 \pm \cfrac{p_5}{q_5} \pm \cdots}}}} \quad \text{oder} \quad \cfrac{p_1}{q_1 + \cfrac{p_2}{q_2 + \cfrac{p_3}{q_3 + \cfrac{p_4}{q_4 + \cfrac{p_5}{q_5} + \cdots}}}}$$

wenn $p_1, p_2 \ldots\ldots$ / $q_1, q_2 \ldots\ldots$ algebraische Werthe sind.

Ist die Anzahl der Gliedbrüche endlich, so heißt der Kettenbruch rational und läßt sich stets seinem Werthe nach durch einen gewöhnlichen Bruch darstellen; ist dieselbe unendlich, so heißt der Kettenbruch irrational. Bricht man die Kette beim Nenner irgend eines Gliedes ab, indem man alle folgenden Gliedbrüche unterdrückt, so erhält man einen ungenauen Werth, welcher aber unter gewissen Umständen dem wahren Werthe des Kettenbruches sich desto mehr nähert, je mehr Gliedbrüche beibehalten werden. Die gewöhnlichen Brüche, welche solchen abgekürzten Kettenbrüchen an Werth gleich sind, heißen Partialbrüche oder auch Näherungsbrüche des Kettenbruches.

Anmerkung 1. Diejenigen Kettenbrüche, welche die meiste Anwendung finden, deshalb auch gewöhnliche oder gemeine Kettenbrüche heißen, haben als Gliedzähler stets 1 und positive Nenner, haben also die Form

$$\cfrac{1}{p_1+\cfrac{1}{p_2+\cfrac{1}{p_3+\cfrac{1}{p_4+\cdots}}}}$$

Anmerkung 2. Wenn in einem gemeinen Kettenbruche dieselben Gliednenner in derselben Reihenfolge beständig wiederkehren, so heißt der Kettenbruch periodisch; die Reihe der als Gliednenner beständig wiederkehrenden Ziffern wird die Periode genannt.

Berechnung der Näherungsbrüche.

§ 117 [§ 110].

Bezeichnet man die successiven Partialbrüche, je nachdem 1, 2, 3...n Gliedbrüche beibehalten werden, mit $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots \frac{a_n}{b_n}$, so ist identisch

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{p_1}{q_1}, \text{ und}$$

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{p_1}{q_1 + \frac{p_2}{q_2}} = \frac{p_1 q_2}{q_1 \cdot q_2 + p_2} = \frac{a_1 q_2}{b_1 q_2 + p_2}.$$

$\frac{a_3}{b_3}$ erhält man aus $\frac{a_2}{b_2}$, wenn man in ihm q_2 durch $q_2 + \frac{p_3}{q_3}$ ersetzt, also ist:

$$\frac{a_3}{b_3} = \frac{a_1\left(q_2 + \frac{p_3}{q_3}\right)}{b_1\left(q_2 + \frac{p_3}{q_3}\right) + p_2} = \frac{a_1 q_2 q_3 + a_1 p_3}{(b_1 q_2 + p_2) q_3 + b_1 p_3}$$

$$= \frac{a_2 q_3 + a_1 p_3}{b_2 q_3 + b_1 p_3}.$$

Ebenso ist:

$$\frac{a_4}{b_4} = \frac{a_2\left(q_3 + \frac{p_4}{q_4}\right) + a_1 p_3}{b_2\left(q_3 + \frac{p_4}{q_4}\right) + b_1 p_3} = \frac{(a_2 q_3 + a_1 p_3) q_4 + a_2 p_4}{(b_2 q_3 + b_1 p_3) q_4 + b_2 p_4}$$

$$= \frac{a_3 q_4 + a_2 p_4}{b_3 q_4 + b_2 p_4}.$$

Folglich ist allgemein, wenn $n \geq 2$ ist:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n-1} q_n + a_{n-2} p_n}{b_{n-1} q_n + b_{n-2} p_n}.$$

Man erhält also irgend einen Partial- (Näherungs-) Bruch vom 2ten ab, indem man den Zähler und den Nenner des nächstvorhergehenden Partialbruches mit dem Nenner des letzten Gliedbruches und ebenso den Zähler und den Nenner des zweitvorhergehenden Partialbruches mit dem

Zähler des letzten Gliedbruches multiplicirt und die Summe der beiden durch Multiplikation mit den Zählern der vorhergehenden Partialbrüche gebildeten Produkte zum Zähler, die Summe der mit Hilfe der Nenner der vorhergehenden Partialbrüche gewonnenen Produkte zum Nenner macht.

Anmerkung. Um zur Kenntniß irgend eines Partialbruches zu kommen, muß man alle ihm vorangehenden berechnen und darf im Laufe der Rechnung keinen heben, damit sein Zähler und sein Nenner unverändert bleibt.

Zusatz. Sind alle Gliedzähler = 1, so ist ebenso

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n-1}q_n + a_{n-2}}{b_{n-1}q_n + b_{n-2}}.$$

Beispiel. Die Näherungsbrüche des gemeinen Kettenbruches

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{2}}}}}}}$$

sind demnach:

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1\cdot2+1}{2\cdot2+1},\ \frac{3\cdot5+1}{5\cdot5+2},\ \frac{16\cdot1+3}{27\cdot1+5},\ \frac{19\cdot8+16}{32\cdot8+27},\ \frac{168\cdot2+19}{283\cdot2+32},$$

oder:

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{16}{27},\ \frac{19}{32},\ \frac{168}{283},\ \frac{355}{598}.$$

Differenz je zweier auf einander folgenden Partialbrüche.

§ 118 [§ 111].

Es ist:

$$\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1}}{b_{n-1}\cdot b_n} = \frac{a_{n-1}(b_{n-1}q_n + b_{n-2}p_n) - (a_{n-1}q_n + a_{n-2}p_n)b_{n-1}}{b_{n-1}\,b_n}$$

$$= \frac{a_{n-1}b_{n-2}p_n - a_{n-2}b_{n-1}p_n}{b_{n-1}\,b_n} = \frac{(a_{n-1}b_{n-2} - a_{n-2}b_{n-1})p_n}{b_{n-1}\,b_n}$$

$$= \frac{-p_n(a_{n-2}b_{n-1} - a_{n-1}b_{n-2})}{b_{n-1}\,b_n} = -\frac{p_nb_{n-2}}{b_n}\left(\frac{a_{n-2}}{b_{n-2}} - \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\right).$$

Bezeichnet man nun $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} - \frac{a_n}{b_n}$ mit $\triangle_n$, so ist die Klammer rechts $= \triangle_{n-1}$, also ist

$$\triangle_n = -\frac{p_nb_{n-2}}{b_n}\cdot\triangle_{n-1}.$$

Nun ist $\triangle_2 = \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} = \frac{p_1}{q_1} - \frac{p_1q_2}{q_1q_2+p_2} = \frac{p_1p_2}{q_1(q_1q_2+p_2)} = \frac{p_1p_2}{b_1\cdot b_2}$.

Folglich ist

$$\triangle_3 = -\frac{p_1p_2p_3\cdot b_1}{b_1b_2b_3} = -\frac{p_1p_2p_3}{b_2b_3},\quad \triangle_4 = +\frac{p_1p_2p_3p_4}{b_3b_4} \text{ u. s. w.}$$

also ist

$$\triangle_n = (-1)^n\cdot\frac{p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdots\cdots p_n}{b_{n-1}\cdot b_n}.$$

Folgerung. Sind alle Gliedzähler und Gliednenner positiv, was im Folgenden immer angenommen werden soll, so gilt dasselbe auch von den Zählern und Nennern der Partialbrüche, also haben dann die Differenzen je zweier auf einander folgenden Näherungsbrüche abwechselnd entgegengesetzte Vorzeichen. Speciell ist

$$\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} > 0,\ \frac{a_2}{b_2} - \frac{a_3}{b_3} < 0,\ \frac{a_3}{b_3} - \frac{a_4}{b_4} > 0 \text{ u. s. w., daher}$$

$$\frac{a_1}{b_1} > \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_2}{b_2} < \frac{a_3}{b_3},\ \frac{a_3}{b^3} > \frac{a_4}{b_4} \text{ u. s. w.}$$

Also: Jeder Partialbruch von **ungeradem** Stellenzeiger ist größer, wie der vorhergehende und der nachfolgende Partialbruch von geradem Stellenzeiger, und jeder Partialbruch von **geradem** Stellenzeicher ist kleiner, wie der vorhergehende und der nachfolgende Partialbruch von ungeradem Stellenzeiger.

Zusatz. Sind alle Gliedzähler $= 1$, so ist

$$\triangle_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{b_{n-1} \cdot b_n};$$

da nun $\triangle_n = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1}}{b_{n-1} \cdot b_n}$ ist, so ist in diesem Falle

$$a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1} = (-1)^n = \pm 1,$$

also haben, da alle a und b ganze Zahlen sind, die Produkte links keinen anderen gemeinschaftlichen Theiler als 1, und deshalb haben auch a_{n-1} und b_{n-1}, a_n und b_n nur die Zahl 1 zum gemeinschaftlichen Theiler, folglich lassen sich $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$ und $\frac{a_n}{b_n}$ und ebenso alle übrigen Partialbrüche nicht heben, sind also unmittelbar in den einfachsten Zahlen ausgedrückt.

§ 119 [§ 112]. Lehrsätze.

I. Die Differenzen je zweier benachbarten Partialbrüche nehmen ihrem absoluten Werthe nach fortwährend ab, oder: Jeder Partialbruch kommt seinem Nachfolger näher, als seinem Vorgänger.

Beweis.

Da $\triangle_n = -\frac{p_n b_{n-2}}{b_n} \triangle_{n-1}$, und $b_n = b_{n-2} p_n + b_{n-1} q_n$, also $b_n > b_{n-2} p_n$, und $\frac{p_n b_{n-2}}{b_n} < 1$ ist, so ist dem absoluten Werthe nach

$$\triangle_n < \triangle_{n-1}.$$

II. Die Partialbrüche mit ungeradem Stellenzeiger nehmen beständig ab, so daß $\frac{a_1}{b_1}$ der größeste ist; die Partialbrüche mit geradem Stellenzeiger nehmen beständig zu, so daß $\frac{a_2}{b_2}$ der kleinste ist.

Beweis. Es ist $\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2}$ dem absoluten Werthe nach $> \frac{a_2}{b_2} - \frac{a_3}{b_3}$; da die 2te Differenz bei positiven Gliedzählern und Gliednennern negativ ist, so ist in diesem Falle

$$\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} > \frac{a_3}{b_3} - \frac{a_2}{b_2},\ \text{folglich}\ \frac{a_1}{b_1} > \frac{a_3}{b_3}.$$

Ebenso ist $$\frac{a_3}{b_3} > \frac{a_5}{b_5},\ \frac{a_5}{b_5} > \frac{a_7}{b_7}\ \text{u. s. w.}$$

Dagegen ist $\frac{a_3}{b_3} - \frac{a_4}{b_4}$ absolut $< \frac{a_2}{b_2} - \frac{a_3}{b_3}$, also, da $\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_3}{b_3}$ negativ ist,

$$\frac{a_3}{b_3} - \frac{a_4}{b_4} < \frac{a_3}{b_3} - \frac{a_2}{b_2},\ \text{folglich}\ \frac{a_4}{b_4} > \frac{a_2}{b_2}.$$

Ebenso ist $$\frac{a_6}{b_6} > \frac{a_4}{b_4},\ \frac{a_8}{b_8} > \frac{a_6}{b_6}\ \text{u. s. w.}$$

Folgerung. Da der letzte Partialbruch mit ungeradem Stellenzeiger in seiner Art der kleinste, dabei aber noch größer ist als der ihm folgende letzte Partialbruch mit geradem Stellenzeiger, da ferner letzterer in seiner Art der größeste ist, so ist jeder Partialbruch mit ungeradem Stellenzeiger größer als jeder von geradem Stellenzeiger.

Endliche Kettenbrüche.

§ 120 [§ 113].

Ist der Kettenbruch endlich, so ist er seinem Werthe nach gleich dem letzten Partialbruche. Da nun dieser, mag sein Stellenzeiger gerade oder ungerade sein, kleiner ist, wie irgend ein vorhergehender Partialbruch mit ungeradem, dagegen größer, wie irgend ein vorhergehender Partialbruch mit geradem Stellenzeiger, so liegt der Werth des Kettenbruches zwischen je 2 aufeinanderfolgenden Partialbrüchen als Grenzen. Da ferner die Differenzen der letzteren immer kleiner werden, so wird bei successiver Berechnung der Partialbrüche der Werth des Kettenbruches in immer engere Grenzen eingeschlossen. Die Partialbrüche nähern sich daher bei wachsendem Stellenzeiger dem Werthe des ganzen Kettenbruches immer mehr und zwar die mit geradem Stellenzeiger crescendo, die mit ungeradem Stellenzeiger decrescendo, sie sind also Näherungswerthe des Kettenbruches. Dabei kennt man stets die Grenze des Fehlers,

den man begeht, wenn man einen Partialbruch als Vertreter des Kettenbruches wählt, und weiß auch, ob der Vertreter zu groß oder zu klein ist.

Unendliche Kettenbrüche.

§ 121 [§ 114].

Ist der Kettenbruch unendlich, so gilt zunächst auch für ihn:

1) daß jeder Partialbruch von ungeradem Stellenzeiger größer, jeder Partialbruch von geradem Stellenzeiger kleiner ist, als alle nachfolgenden Partialbrüche;
2) daß die Näherungsbrüche mit ungeradem Stellenzeiger immer kleiner, die mit geradem Stellenzeiger immer größer werden, daß aber
3) kein Partialbruch von ungeradem Stellenzeiger so klein werden kann, wie irgend einer von geradem Stellenzeiger, und kein Partialbruch von geradem Stellenzeiger so groß, als irgend einer von ungeradem.

Da nun die Partialbrüche ungerader Ordnung immerwährend abnehmen, ohne so klein zu werden, als man will, die von geradem Stellenzeiger fortwährend wachsen, ohne beliebig groß werden zu können, so ist beim Fortgehen ins Unendliche kein anderer Fall möglich, als daß sowohl jene decrescendo, als auch diese crescendo einer gewissen Grenze sich unbegrenzt nähern, ohne sie zu erreichen. Ist die Grenze des Abnehmens der Partialbrüche ungerader Ordnung $= h$, die des Wachsens der anderen $= k$, wo also h und k endliche Zahlen sind, so ist entweder möglich, daß beide Grenzen verschieden oder daß sie identisch sind. Im ersten Falle stellt der Kettenbruch symbolisch gleichzeitig 2 Größen dar, von denen die eine die Grenze der einen, die andere die Grenze der anderen Art von Partialbrüchen ist. Man nennt solche Kettenbrüche, mit denen man also einen bestimmten Zahlbegriff nicht verbinden kann, divergent. — Sind dagegen die Grenzen h und k identisch, so nähern sich beide Arten von Partialbrüchen derselben Grenze von entgegengesetzten Seiten und können derselben so nahe gebracht werden, als man will. Man nennt dann diese Grenze den Werth des Kettenbruches, und dieser selbst heißt convergent. Von seinem Werthe und der Art, wie sich die Partialbrüche ihm nähern, gilt dasselbe, wie vom endlichen Kettenbruche. Um ein Erkennungszeichen für die Convergenz eines unendlichen Kettenbruches zu erhalten, beachte man, daß die Grenze von

$\frac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}}$ oder $\lim \frac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}}$ identisch ist mit der von $\frac{a_{2n}}{b_{2n}}$, d. h. also mit $\lim \frac{a_{2n}}{b_{2n}}$;

$$\text{also ist } \lim \frac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}} - \lim \frac{a_{2n}}{b_{2n}} = 0, \text{ oder}$$

$$\lim \left(\frac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}} - \frac{a_{2n}}{b_{2n}}\right) = 0 \text{ oder } \lim \triangle_{2n} = 0, \text{ d. h.}$$

die Differenz je zweier benachbarten Partialbrüche eines convergenten unendlichen Kettenbruches muß sich unbegrenzt der Null als Grenze nähern, je größer der Stellenzeiger wird.

§ 122 [§ 115]. Lehrsatz.

Die Partialbrüche eines gemeinen Kettenbruches unterscheiden sich von dem wahren Werthe des Kettenbruches um so weniger, je größer ihre Stellenzeiger sind.

Beweis. Wenn alle Gliedzähler 1 sind, so ist

$\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} - \frac{a_n}{b_n} = \triangle_n = -\frac{b_{n-2}}{b_n} \triangle_{n-1}$; also ist (dem absoluten Werthe nach)

$$\triangle_{n-1} = \frac{b_n}{b_{n-2}} \cdot \triangle_n.$$

Da nun $b_n = b_{n-1} \cdot q_n + b_{n-2}$ ist, so ist

$$\triangle_{n-1} = \left(1 + \frac{b_{n-1} \cdot q_n}{b_{n-2}}\right) \cdot \triangle_n; \text{ ferner ist}$$

$b_{n-1} \cdot q_n = (b_{n-2} \cdot q_{n-1} + b_{n-3}) \cdot q_n$; und da alle Gliednenner positive Zahlen sind, so ist $\frac{b_{n-1} \cdot q_n}{b_{n-2}} > 1$, und daher

$$\triangle_{n-1} > 2\triangle_n;$$

also ist der Abstand von $\frac{a_{n-2}}{b_{n-2}}$ bis zu $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$ mehr als doppelt so groß, als der von $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$ bis $\frac{a_n}{b_n}$. Da nun $\frac{a_n}{b_n}$ sowohl für ein gerades, als auch für ein ungerades n zwischen $\frac{a_{n-2}}{b_{n-2}}$ und $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$ liegt, so folgt daraus, daß $\frac{a_n}{b_n}$ näher an $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$ liegt, als an $\frac{a_{n-2}}{b_{n-2}}$; also muß um so mehr der Werth des Kettenbruches, welcher noch zwischen $\frac{a_n}{b_n}$ und $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$ liegt, dem ersteren Partialbruche näher als dem letzteren liegen.

§ 123 [§ 116]. Lehrsatz.

Die Näherungsbrüche eines gemeinen Kettenbruches sind die Brüche, welche in den **kleinsten** Zahlen die **größeste** Annäherung an den wahren Werth des Kettenbruches geben.

Beweis. Es sei $\frac{s}{t}$ ein in kleineren Zahlen als $\frac{a_n}{b_n}$ ausgedrückter Bruch, so daß also $s < a_n$, $t < b_n$ ist; dann ist

$$\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} - \frac{s}{t} = \frac{ta_{n-1} - sb_{n-1}}{tb_{n-1}}.$$

Da nun a_{n-1}, b_{n-1}, s, t ganze Zahlen sind, folglich auch die Produkte des Zählers, so muß der Zähler, falls er nicht $= 0$ ist, seinem absoluten Werthe nach mindestens $= 1$ sein. Da nun der Nenner $tb_{n-1} < b_n b_{n-1}$ ist, so ist

$$\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} - \frac{s}{t} > \frac{1}{b_n b_{n-1}}, \text{ also } > \triangle_n \text{ d. h.}$$

$$> \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} - \frac{a_n}{b_n};$$

folglich liegt $\frac{s}{t}$ nicht zwischen $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$ und $\frac{a_n}{b_n}$, und deshalb ist $\frac{s}{t}$ von dem zwischen jenen Grenzen liegenden wahren Werthe des Kettenbruches weiter entfernt als $\frac{a_n}{b_n}$.

Anmerkung. Den Grad der Annäherung anlangend, so ist der Abstand des Kettenbruches von dem Partialbruche $\frac{a_n}{b_n}$ kleiner als von $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$, d. h. kleiner als der absolute Werth von $\triangle_n$, also $< \frac{1}{b_n b_{n-1}}$, folglich um so mehr $< \frac{1}{b_n^2}$. Dieses ist also die Fehlergrenze, wenn man $\frac{a_n}{b_n}$ für den wahren Werth des Kettenbruches setzt.

§ 124 [§ 117].

Die Formel zur Berechnung der Näherungsbrüche gilt bedingungsweise auch für $n = 0$ und $n = 1$.

Wenn zu dem Kettenbruche eine ganze Zahl k addirt ist, so hat derselbe die Form:

$$k+\cfrac{p_1}{q_1+\cfrac{p_2}{q_2+\cfrac{p_3}{q_3+\cdots}}}$$

In diesem Falle ist

$$\frac{a_1}{b_1}=k+\frac{p_1}{q_1}=\frac{kq_1+p_1}{q_1};$$

$$\frac{a_2}{b_2}=\frac{k\left(q_1+\frac{p_2}{q_2}\right)+p_1}{q_1+\frac{p_2}{q_2}}=\frac{(kq_1+p_1)\cdot q_2+k\cdot p_2}{q_1\cdot q_2+p_2}$$

$$=\frac{a_1q_2+kp_2}{b_1q_2+p_2};$$

$$\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_1\left(q_2+\frac{p_3}{q_3}\right)+kp_2}{b_1\left(q_2+\frac{p_3}{q_3}\right)+p_2}=\frac{(a_1q_2+kp_2)\,q_3+a_1p_3}{(b_1q_2+p_2)\cdot q_3+b_1p_3}$$

$$=\frac{a_2q_3+a_1p_3}{b_2q_3+b_1p_3};$$

also ist von hier ab allgemein:

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_{n-1}\cdot q_n+a_{n-2}\,p_n}{b_{n-1}\cdot q_n+b_{n-2}\cdot p_n}.$$

Bezeichnet man demnach consequent k mit $\frac{a_0}{b_0}$, so daß also

$\frac{k}{1}=\frac{a_0}{b_0}$, so wird nach obiger Formel

$\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_1q_2+a_0p_2}{b_1q_2+b_0p_2}$; also paßt unter diesen Umständen auch $\frac{a_2}{b_2}$ schon unter die allgemeine Form. — Fügt man vor $\frac{a_0}{b_0}$ noch symbolisch hinzu $\frac{a_{-1}}{b_{-1}}=\frac{1}{0}$, so wird

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_0q_1+a_{-1}p_1}{b_0q_1+b_{-1}p_1}.$$

Hält man also daran fest, daß bei jedem Kettenbruche die beiden ersten Partialbrüche $\frac{a_{-1}}{b_{-1}}=\frac{1}{0}$ und $\frac{a_0}{b_0}=\frac{k}{1}$ sind, so sind alle übrigen aus der allgemeinen Form sogleich zu berechnen.

§ 125 [§ 118]. Aufgabe.

Einen gewöhnlichen Bruch in einen gemeinen Kettenbruch zu verwandeln.

Aufl. Man dividire den Zähler des gegebenen Bruches durch seinen

Nenner, den Nenner durch den Rest und so weiter jeden vorhergehenden Divisor durch den erhaltenen Rest und mache die bei der ersten Division etwa herauskommende Zahl zu Ganzen, alle übrigen Quotienten zu Gliednennern.

Beispiel.

$\frac{358}{117}$.

```
117|358|3
    351
      7|117|16
          7
         47
         42
          5|7|1
            5
            2|5|2
              4
              1|2|2
                2
```

also ist $\frac{358}{117} = 3 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}$.

Die Näherungsbrüche sind $\frac{1}{0}, \frac{3}{1}, \frac{49}{16}, \frac{52}{17}, \frac{153}{50}, \frac{358}{117}$.

Grund. $\frac{358}{117} = 3 + \frac{7}{117} = 3 + \frac{1}{\frac{117}{7}} = 3 + \frac{1}{16 + \frac{5}{7}}$

$$= 3 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{\frac{7}{5}}} = 3 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{1 + \frac{2}{5}}} = 3 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{5}{2}}}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}.$$

Anmerkung. Aus dem Verfahren folgt, daß der Kettenbruch stets rational sein muß.

§ 126 [§ 119]. Aufgabe.

Eine irrationale Quadratwurzel in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Aufl. Jede irrationale Zahl, z. B. eine irrationale Quadratwurzel, läßt sich mit Hilfe eines Kettenbruches auf die vortheilhafteste Weise in kleineren Zahlen ausdrücken; und zwar ist der Kettenbruch stets ein periodischer. Das Verfahren der Verwandlung geht aus dem folgenden Beispiele hervor.

$\sqrt{19}$ ist > 4, also $= 4 + \frac{1}{z}$, $\frac{1}{z} = \sqrt{19} - 4$, $z = \frac{1}{\sqrt{19} - 4} =$

$$\frac{\sqrt{19} + 4}{3} = 2 + \frac{1}{z_1},$$

$$\sqrt{19}=4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{z_1}},\quad \frac{1}{z_1}=\frac{\sqrt{19}-2}{3},\quad z_1=\frac{3}{\sqrt{19}-2}=\frac{3\cdot(\sqrt{19}+2)}{15}=\frac{\sqrt{19}+2}{5}=1+\frac{1}{z_2}$$

$$\sqrt{19}=4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{z_2}}},\quad \frac{1}{z_2}=\frac{\sqrt{19}-3}{5},\quad z_2=\frac{5}{\sqrt{19}-3}=\frac{5\cdot(\sqrt{19}+3)}{10}=\frac{\sqrt{19}+3}{2}=3+\frac{1}{z_3}$$

$$\sqrt{19}=4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{z_3}}}},\quad \frac{1}{z_3}=\frac{\sqrt{19}-3}{2},\quad z_3=\frac{2\cdot(\sqrt{19}+3)}{10}=\frac{\sqrt{19}+3}{5}=\frac{\sqrt{19}+3}{5}=1+\frac{1}{z_4}$$

$$\sqrt{19}=4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{z_4}}}}},\quad \frac{1}{z_4}=\frac{\sqrt{19}-2}{5},\quad z_4=\frac{5\cdot(\sqrt{19}+2)}{15}=\frac{\sqrt{19}+2}{3}=2+\frac{1}{z_5}$$

$$\sqrt{19}=4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{z_5}}}}}},\quad \frac{1}{z_5}=\frac{\sqrt{19}-4}{3},\quad z_5=\frac{3\cdot(\sqrt{19}+4)}{3}=\sqrt{19}+4=8+\frac{1}{z_6}$$

$$\sqrt{19}=4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{z_6}}}}}}},\quad \frac{1}{z_6}=\sqrt{19}-4=\frac{1}{z},\quad z_6=z=\frac{\sqrt{19}+4}{3}=2+\frac{1}{z_1},$$

also eine Periode.

Es ist demnach

$$\sqrt{19}=4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}}}}$$

Die Näherungsbrüche dieses Kettenbruches sind:

$$\frac{a_{-1}}{b_{-1}} = \frac{1}{0}, \frac{a_0}{b_0} = \frac{4}{1}, \frac{a_1}{b_1} = \frac{9}{2}, \frac{a_2}{b_2} = \frac{13}{3}, \frac{a_3}{b_3} = \frac{48}{11}, \frac{a_4}{b_4} = \frac{61}{14}, \frac{a_5}{b_5} = \frac{170}{39},$$

$\frac{a_6}{b_6} = \frac{1421}{326}$ u. s. w. Der Fehler beim letzten Bruche beträgt weniger, als $\frac{1}{326^2}$, d. h. er ist $< 0{,}0000093$, und zwar ist der Werth $\frac{1421}{326}$ zu klein, da sein Stellenzeiger gerade ist.

Anmerkung. Diese Anwendung der Kettenbrüche ist für die Auflösung quadratischer Gleichungen von Wichtigkeit.

XI. Kapitel.

Diophantische Gleichungen.

§ 127 [§ 120] (Heis § 77a).

Hat man eine Gleichung mit 2 Unbekannten zunächst auf die geordnete Form $ax + by = c$ gebracht, worin a, b, c ganze Zahlen sind, so leitet man aus ihr durch Dividiren mit dem etwa vorhandenen größesten gemeinschaftlichen Theiler die neue Form

$$fx + gy = k$$

her, worin f, g, k relative Primzahlen sind.

Letzteres muß nach § 104 stets möglich sein, wenn die Gleichung als diophantische lösbar sein soll. Wenn man nun den Bruch $\frac{g}{f}$ in einen gemeinen Kettenbruch verwandelt, seine Partialbrüche berechnet und findet, daß $\frac{a_n}{b_n} = \frac{g}{f}$ ist, so ist nach § 117 Zus.

$$a_{n-1} \cdot f - b_{n-1} \cdot g = \pm 1,$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Hieraus folgt

$$a_{n-1}kf - b_{n-1}kg = \pm k \text{ oder}$$
$$f \cdot (\pm a_{n-1}k) + g \cdot (\mp b_{n-1}k) = k.$$

Vergleicht man mit ihr die gegebene Gleichung

$$fx + gy = k,$$

so werden beide identisch, wenn man setzt

$$x = \pm a_{n-1} \cdot k, \; y = \mp b_{n-1} \cdot k.$$

Diese beiden zusammengehörigen, durch Multiplikation des Gliedes auf der rechten Seite der Gleichung mit Zähler und Nenner des vorletzten

Partialbruches gewonnenen Werthe der beiden Unbekannten genügen mithin der diophantischen Gleichung; und da sowohl a_{n-1} und b_{n-1}, als auch k ganze Zahlen sind, so bilden sie ein erstes Wurzelpaar derselben.

§ 128 [§ 121].

Wenn aber die Werthe x_1 und y_1 der gegebenen diophantischen Gleichung genügen, d. h. wenn $fx_1 + gy_1 = k$ ist, so ist auch

$$fx_1 + fgm + gy_1 - fgm = k \text{ oder}$$
$$f(x_1 + gm) + g(y_1 - fm) = k,$$

also sind auch

$$x = \pm a_{n-1}k + gm$$
$$y = \mp b_{n-1}k - fm,$$

worin m eine beliebige ganze, positive oder negative Zahl darstellt, für jeden Specialwerth von m zusammengehörige Wurzelwerthe. Man erhält also aus dem ersten Wurzelpaare beliebig viele andere, wenn man zu dem Werthe von x_1 den Coëfficienten von y in der gegebenen Gleichung ebenso oft addirt, als man von y_1 den Coëfficienten von x subtrahirt oder umgekehrt.

Zugleich umfassen obige allgemeinen Ausdrücke alle möglichen Wurzelpaare der gegebenen Gleichung. Denn wenn noch ein anderes Paar

$$x = \pm a_{n-1}k + gm + s$$
$$y = \mp b_{n-1}k - fm - t$$

existirte, so müßte

$$f\cdot(\pm a_{n-1}k + gm + s) + g\cdot(\mp b_{n-1}k - fm - t) = k$$

sein; da aber

$$f\cdot(\pm a_{n-1}k + gm) + g\cdot(\mp b_{n-1}k - fm) = k$$

ist, so müßte

$$fs = gt$$

sein. Da aber nur ganze Zahlen vorkommen dürfen, so folgt hieraus, daß g ein Theiler von fs sein muß; und da g in f nicht aufgehen darf, so muß es in s aufgehen, also muß s ein Vielfaches von g sein, und aus demselben Grunde t dasselbe Vielfache von f. Deshalb läßt sich s mit gm in ein einziges Vielfaches von g, und t mit fm in dasselbe Vielfache von f zusammenziehen; also gehört auch dieses Wurzelpaar unter die allgemeine Form.

Anmerkung. Haben f und g verschiedene Zeichen, hat also die gegebene Gleichung die Form $fx - gy = h$, so setzt man $(-y) = y_1$ und erhält so

$$fx + gy_1 = k;$$

diese Gleichung löst man auf und kehrt dann die Zeichen von y_1 um, erhält also

$$x = \pm a_{n-1}k + gm$$
$$y = \pm b_{n-1}k + fm$$

in diesem Falle als allgemeine Lösung.

Beispiel. $$\frac{2373}{13x + 24y} = 1.$$
$$13x + 24y = 2373.$$

$$\frac{24}{13} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2}}} \qquad \frac{a_{-1}}{b_{-1}} = \frac{1}{0}, \frac{a_0}{b_0} = \frac{1}{1}, \frac{a_1}{b_1} = \frac{2}{1}, \frac{a_2}{b_2} = \frac{11}{6}, \frac{a_3}{b_3} = \frac{24}{13}.$$

Da nun n ungerade ist, so ist das erste Wurzelpaar

$$x_1 = -11 \cdot 2373 = -26103$$
$$y_1 = +6 \cdot 2373 = +14238,$$

also ist die allgemeine Lösung

$$x = -26103 + 24m$$
$$y = +14238 - 13m.$$

Faßt man in diesem Resultate m als Summe $= (m_1 + m_2)$ auf, setzt also

$$x = (-26103 + 24m_1) + 24m_2$$
$$y = (14238 - 13m_1) - 13m_2$$

und bestimmt nun m_1 so, daß die Klammer, in welcher die negative Wurzel, hier x_1, vorkommt, ihren kleinsten positiven Werth annimmt, so erhält man, indem man $m_1 = 1088$ wählt,

$$x = (-26103 + 26112) + 24m_2$$
$$y = (14238 - 14144) - 13m_2;$$

dadurch erhält die allgemeine Lösung die einfachere Form

$$x = 9 + 24m_2$$
$$y = 94 - 13m_2;$$

also sind, wenn man sich auf positive Zahlen beschränkt, die möglichen Lösungen

$$x = 9,\ 33,\ 57,\ 81,\ 105,\ 129,\ 153,\ 177$$
$$y = 94,\ 81,\ 68,\ 55,\ 42,\ 29,\ 16,\ 3.$$

§ 129 [§ 122] (Heis § 79).

Bei eingekleideten Aufgaben ist die Zahl der zulässigen Wurzelpaare oft noch durch die Bedingungen der Aufgabe weiter beschränkt, wie folgendes Beispiel lehren mag.

Jemand will einem Kaufmanne eine Schuld von 31 Frcs. 50 Cent. bezahlen; er besitzt aber nur 20Francs-Stücke, und der Kaufmann nur 10Markstücke Reichswährung à $12^3/_8$ Frcs. Wie viel 20Frcs.-Stücke muß der erstere zahlen, und wie viel 10Markstücke muß der Kaufmann zurückgeben?

Die Anzahl der 20Frcs.-Stücke sei x, die der 10Markstücke y; dann ist

$$20x - 12^3/_8\,y = 31{,}5 \text{ oder (wenn } -y = z \text{ gesetzt wird)}$$
$$160x + 99z = 252. \text{ Ferner ist}$$

$$\frac{99}{160} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{7}}}}}}}}$$

Die Näherungsbrüche dieses Kettenbruches sind:

$$\frac{a_{-1}}{b_{-1}} = \frac{1}{0}, \frac{a_0}{b_0} = \frac{0}{1}, \frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{1}, \frac{a_2}{b_2} = \frac{1}{2}, \frac{a_3}{b_3} = \frac{2}{3},$$
$$\frac{a_4}{b_4} = \frac{3}{5}, \frac{a_5}{b_5} = \frac{5}{8}, \frac{a_6}{b_6} = \frac{8}{13}, \frac{a_7}{b_7} = \frac{13}{21},$$
$$\frac{a_8}{b_8} = \frac{99}{160}.$$

Da n gerade ist, so ist das erste Wurzelpaar

$$x_1 = 13 \cdot 252 = 3276, \quad -z_1 = y_1 = 21 \cdot 252 = 5292.$$

Nach einer ähnlichen Vereinfachung wie oben ist

$$x = 9 + 99m \text{ und } y = 12 + 160m.$$

Die einfachste Ausgleichung der Schuld geschieht also mittelst 9 20Frcs.-Stücken und 12 10Markstücken.

§ 130 [§ 123].

Hat man 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten, so verschafft man sich zuerst eine Eliminationsgleichung mit 2 Unbekannten, löst dieselbe in vorstehend erörterter Art auf, substituirt die allgemeinen Werthe ihres Wurzelpaares in möglichst einfacher Form in eine Gleichung, welche auch die dritte Unbekannte enthält, und bestimmt dann aus ihr als einer zweiten diophantischen Gleichung die allgemeinen Werthe der dritten Unbekannten und des in den substituirten allgemeinen Werthen enthaltenen noch unbestimmten Factors m. Folgendes Beispiel mag den Gang der Rechnung veranschaulichen.

Aufgabe. Welche Zahl giebt bei der Division mit 3, 5, 7 beziehungsweise den Rest 2, 2, 5?

Lösung. Eine Zahl, welche mit 3 dividirt, den Rest 2 giebt, muß die allgemeine Form $3x + 2$ haben; die Zahl muß aber auch in den Formen $5y + 2$ und $7z + 5$ sich schreiben lassen. Also sind die Gleichungen:

$$3x + 2 = 5y + 2 = 7z + 5.$$

Aus

$$3x + 2 = 7z + 5$$

folgt

$$3x - 7z = 3$$

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}; \frac{a_0}{b_0} = \frac{2}{1}, \frac{a_1}{b_1} = \frac{7}{3};$$

also ist n ungerade; deshalb ist

$$x_1 = -6 + 7m_1 \quad \text{oder} \quad = 1 + 7m$$
$$z_1 = -3 + 3m_1 \quad \text{oder} \quad = 3m.$$

Substituirt man in $5y + 2 = 7z + 5$ den Werth von z, so erhält man:

$$5y + 2 = 21m + 5$$
$$5y - 21m = 3.$$

$$\frac{21}{5} = 4 + \frac{1}{5}, \text{ also } \frac{a_0}{b_0} = \frac{4}{1}, \frac{a_1}{b_1} = \frac{21}{5}$$

$$y_1 = -12 + 21n_1 = 9 + 21n$$
$$m_1 = -3 + 5n_1 = 2 + 5n.$$

Also ist

$$x = 1 + 7 \cdot (2 + 5n) = 15 + 35n$$
$$y = 9 + 21n$$
$$z = 3 \cdot (2 + 5n) = 6 + 15n.$$

Die gesuchte Zahl hat daher die Form

$$47 + 105n$$

wo n jede ganze Zahl ist; also genügen der Aufgabe die Zahlen:

47, 152, 257 u. s. w.

XII. Kapitel.

Combinationslehre.

(Heis § 88—90.)

§ 131 [§ 124].

Combinationslehre im weiteren Sinne ist die Lehre von der gesetzmäßigen Zusammenstellung gegebener Dinge zu bestimmten Gruppen, so daß keine Zusammenstellung fehlt, und keine zweimal vorkommt. Die gegebenen Dinge werden ohne Rücksicht auf etwaige Eigenschaften als Individuen gefaßt und heißen Elemente; man bezeichnet sie mit Buchstaben a b c d …… oder $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$ …… oder mit Ziffern 1 2 3 4 ….., welche eigentlich nur die Stellenzeiger der Elemente sind. Der Complex sämmtlicher gegebener Elemente heißt der combinatorische Zeiger, jede einzelne Zusammenstellung heißt eine combinatorische Form. Soll in dem Zeiger ein Element öfter gedacht werden, so schreibt man es nur einmal und fügt ihm als Wiederholungsexponent die Zahl bei, welche angiebt, wie oft es zu denken ist; also $(1^4 2^3 3\, 4)$ bedeutet (1111 222 3 4). — Die Elemente des Zeigers unterscheidet man in niedrigere und höhere, je nachdem sie dem Anfange näher oder ferner stehen. Wenn in einer combinatorischen Form ein höheres Element vor einem

niedrigeren steht, so nennt man diese gegenseitige Stellung der beiden Elemente eine Inversion; so z. B. finden sich in der Form dbcae, gebildet aus dem Zeiger abcde, 5 Inversionen. — Die combinatorischen Formen zerfallen nach der Anzahl der in ihnen enthaltenen Elemente in verschiedene Klassen, deren jede ihren Klassenexponent hat; sie zerfallen ferner in verschiedene Ordnungen, welche durch das Anfangselement, und Unterordnungen, welche durch die successive folgenden Elemente bestimmt werden.

§ 132 [§ 125].

Treten alle Elemente des gegebenen Zeigers in jede Form, so daß alle Formen von derselben Klasse und materiell gleich sind, also nur durch die gegenseitige Stellung der Elemente sich unterscheiden, so heißen die Formen Permutationen, und die Bildung derselben heißt Permutiren. Treten nicht alle Elemente in jede Form, wird vielmehr jede Form aus derselben Anzahl theilweise oder ganz anderer Elemente gebildet, so daß alle Formen materiell verschieden sind, weil sie sich nicht bloß durch die Stellung, sondern auch durch die Art der Elemente unterscheiden, so heißen dieselben Combinationen, und ihre Bildung heißt Combiniren. Werden endlich aus einem Zeiger zunächst alle Combinationen, und dann von jeder Combination als Zeiger alle Permutationen gebildet, so heißen diese neuen Formen, bei welchen gleichzeitig Zahl, Art und Stellung der Elemente berücksichtigt wird, Variationen, und das Verfahren bei ihrer Bildung heißt Variiren.

Bei jeder der drei Operationen unterscheidet man einen construirenden Theil, welcher alle möglichen Formen bildet, und einen rechnenden, welcher die Anzahl der möglichen Formen für einen gegebenen Zeiger bestimmt.

a) Permutiren.

§ 133 [§ 126]. Aufgabe.

Die Permutationen eines gegebenen Zeigers zu bilden.

Aufl. Sind zwei Elemente (12) gegeben, so sind 12, und 21 die möglichen Permutationen. — Ist der gegebene Zeiger (123), so macht man jedes Element der Reihe nach zum Anfangselemente und permutirt die beiden anderen:

123 213 312
132 231 321.

Ist der Zeiger (1234), so verfährt man ebenso; die Permutationen lauten also:

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321.

— Hierin spricht sich das Gesetz aus, daß man alle möglichen Permutationen eines Zeigers erhält, wenn man den Zeiger selbst als erste Form nimmt, dann successive immer das dem Ende nächste, noch erhöhungsfähige Element so wenig als möglich erhöht und die noch übrigen Elemente in ihrer natürlichen Ordnung folgen läßt.

§ 134 [§ 127]. Lehrsatz.

Die Anzahl aller Permutationsformen von n verschiedenen Elementen ist gleich dem Produkte aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.

Beweis. Aus dem vorigen Paragraphen folgt, daß man alle möglichen Permutationen aus 3 Elementen erhält, wenn man jedes dieser drei Elemente allen aus den beiden übrigen gebildeten Formen vorsetzt, daß man ebenso alle möglichen Permutationen aus 4 Elementen erhält, wenn man jedes der 4 Elemente allen aus den 3 übrigen gebildeten Formen vorsetzt u. s. w. Bezeichnet man die Anzahl der Permutationen aus n Elementen mit NP $(123 \cdots n)$, so folgt daraus, daß

$$NP(123 \cdots n) = n \cdot NP(123 \cdots \overline{n-1}),$$

$$NP(123 \cdots \overline{n-1}) = (n-1) \cdot NP(123 \cdots \overline{n-2})$$

u. s. w. ist. Da nun $NP(12) = 2$ ist, so ist

$$NP(123 \cdots n) = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

(sprich n Facultät oder Factorielle n).

§ 135 [§ 128]. Lehrsatz.

Die Anzahl der Permutationsformen von n Elementen, unter denen p einander gleich sind, ist gleich dem Quotienten aus den Permutationszahlen von n und von p Elementen.

Beweis. Faßt man unter den Permutationen eines gegebenen Zeigers alle diejenigen in eine Gruppe zusammen, in welchen $n-p$ be-

stimmte Elemente dieselbe Stellung haben, die p übrigen aber alle möglichen Stellungen einnehmen können, so gehören zu jeder solchen Gruppe nach § 134. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p$, d. h. $p!$ Formen; und da die Gesammtanzahl der Formen $= n!$ ist, so ist die Anzahl solcher Gruppen $= \frac{n!}{p!}$. Werden diese p Elemente sämmtlich identisch, so fallen alle Formen einer Gruppe in eine einzige Form zusammen, also giebt es dann nur so viel Formen, als vorher Gruppen, d. h. $\frac{n!}{p!}$. — Werden dazu noch q andere Elemente unter sich ebenfalls gleich, so fallen wieder je $q!$ Formen der letzten Anzahl in eine zusammen, also bleiben nur $\frac{n!}{p!\,q!}$. — Hieraus folgt allgemein, daß

$$NP\,(1^\alpha\, 2^\beta\, 3^\gamma \cdots) = \frac{(\alpha+\beta+\gamma+\cdots)!}{\alpha!\cdot\beta!\cdot\gamma!\cdots}$$

Zusatz. Sind unter n Elementen p identische der einen Art, und alle übrigen $n-p$ identische einer anderen Art, so ist die Anzahl der möglichen Permutationen

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots p\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots (n-p)},$$

also, wenn man den Bruch durch den ersten oder zweiten Factorencomplex des Nenners hebt,

entweder $$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(p+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots (n-p)}$$

oder $$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(p-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots p}.$$

Den letzten Bruch, dessen Zähler das Produkt der p nächsten ganzen Zahlen von n inclusive abwärts, dessen Nenner das Produkt der p ersten ganzen Zahlen von 1 aufwärts ist, schreibt man n_p (n tief p) und nennt ihn die p^{te} getheilte fallende Factorielle der Zahl n. — Entsprechend ist die abgekürzte Form des ihm vorangehenden Bruchs $= n_{n-p}$, und es folgt also aus Obigem, daß

$$n_p = n_{n-p} \text{ ist.}$$

§ 136 [§ 129]. Aufgabe.

Wenn von einem Zeiger eine gewisse Permutation gegeben ist, und man berechnen soll, die wievielte sie ist, so ist der Gang der Rechnung der des folgenden

Beispiels. Die wievielte Permutation des Zeigers $(1^4\, 2^3\, 3^2\, 4\, 5)$ ist 31211415232?

Lösung. Der gegebenen Form gehen voran alle von der Ordnung 1, also $\frac{(3+3+2+1+1)!}{3!\,3!\,2!} = 50400$ Formen,

ebenso alle der Ordnung 2, also $\frac{(4+2+2+1+1)!}{4!\,2!\,2!} = 37800$,

ferner alle der Ordnung 311, also $\frac{(2+3+1+1+1)!}{2!\,3!} = 3360$,

alle von der Ordnung $312111 = \frac{(2+1+1+1)!}{2!} = 60$,

alle von der Ordnung $312112 = 5! = 120$,

alle von der Ordnung $312113 = \frac{5!}{2!} = 60$,

alle von der Ordnung $31211412 = 3! = 6$,

alle von der Ordnung $31211413 = \frac{3!}{2!} = 3$,

und außerdem noch die Form 31211415223, also noch 1.

Der gegebenen Form gehen daher im Ganzen voraus 91810 Formen, also ist sie die 91811te Permutation.

§ 137 [§ 130]. Aufgabe.

Soll umgekehrt von einem gegebenen Zeiger eine bestimmte Form gefunden werden, ohne alle Vorgänger zu bilden, so geschieht dieses nach folgendem

Beispiele. Wie heißt die 438ste Permutation des Zeigers $(1^4 2^3 3^2 4\,5)$?

Lösung. Da nach dem Vorstehenden von der Ordnung 1 im Ganzen 50400 Formen vorhanden sind, so gehört die 438ste zu dieser Ordnung. Sie gehört aber auch zu der Unterordnung 11, da es von ihr $\frac{(2+3+2+1+1)!}{2!\,3!\,2!} = 15120$ Formen giebt, und weiter zur Unterordnung 111, da es von ihr $\frac{(1+3+2+1+1)!}{3!\,2!} = 3360$ Formen giebt. Dagegen zählt die Unterordnung 1111 nur $\frac{(3+2+1+1)!}{3!\,2!} = 420$ Formen, also gehört die 438ste Permutation nicht mehr zu dieser, sondern zur Unterordnung 1112 und ist in ihr die 18te. Beginnt man also mit 11121223345 und permutirt diesen Zeiger nach den gegebenen Regeln, so ist die 18te Permutation, nämlich 11121232543, die gesuchte.

b) Combiniren.

§ 138 [§ 131]. Erklärung.

Nach der Begriffserklärung muß beim Combiniren stets die Anzahl der Elemente bestimmt sein, welche zu jeder Form gehören soll, d. h. es

muß der Klassenexponent gegeben sein. Die Combinationen der ersten, zweiten, dritten u. s. w. Klasse heißen beziehungsweise Unionen, Binionen oder Amben, Ternionen oder Ternen u. s. w. Ferner ist der doppelte Fall zu unterscheiden, daß jedes Element für jede Form nur einmal oder wiederholt verwendet werden darf, d. h. man unterscheidet Combinationen ohne und mit gestatteter Wiederholung.

§ 139 [§ 132]. Aufgabe.

Sollen aus dem Zeiger (123456) die Combinationen der vierten Klasse ohne Wiederholung gebildet werden, so sind dieses folgende:

1234	1256	2345
1235	1345	2346
1236	1346	2356
1245	1356	2456
1246	1456	3456.

Hierin spricht sich das allgemeine Gesetz aus: Um aus n Elementen die Combinationen zur p^{ten} Klasse ohne Wiederholung, wo $p \leq n$ sein muß, zu bilden, beginnt man mit der aus den p ersten Elementen bestehenden Form und bildet stets die nächstfolgende dadurch, daß man in der am weitesten nach rechts stehenden, noch erhöhungsfähigen Stelle so wenig als möglich erhöht, dabei aber stets beachtet, daß in keiner Form eine Inversion (§ 131) vorkommen darf.

Sollen aus demselben Zeiger dieselben Formen mit gestatteter Wiederholung gebildet werden, so geschieht dieses nach demselben Principe, aber man beginnt mit der Form, welche das erste Element so oft enthält, als der Klassenexponent Einheiten enthält, also:

1111	1116	1126	1144	1166
1112	1122	1133	1145	1222
1113	1123	1134	1146	1223
1114	1124	1135	1155	1224
1115	1125	1136	1156	u. s. w.

§ 140 [§ 133]. Aufgabe.

Die Anzahl der aus einem Zeiger von n Elementen möglichen Combinationen der p^{ten} Klasse **ohne Wiederholung** zu ermitteln.

Aufl. Offenbar giebt es n Unionen. — Jede Union liefert eine

Ambe, wenn man ihr eines der noch übrigen n — 1 Elemente so beifügt, daß keine Inversion entsteht; also geben alle Unionen, in dieser Weise benutzt, n (n — 1) Amben. Da aber alle die Amben, welche dieselben Elemente, wenn auch in verschiedenen Stellungen, enthalten, einander gleich zu achten sind, und da je zwei Elemente sich 1 · 2 mal permutiren lassen, so sind unter jenen n (n — 1) Amben je zwei einander gleich, also ist die Anzahl der verschiedenen Amben $= \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = n_2$. — Jede Ambe liefert eine Terne, wenn man ihr eins der übrigen n — 2 Elemente so beifügt, daß keine Inversion entsteht; also erhält man auf diese Weise $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot (n-2)$ Ternen. Aus gleichem Grunde wie oben sind unter den $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot (n-2)$ Ternen stets die 3 einander gleich, welche dieselben Elemente, wenngleich in verschiedenen Stellungen, enthalten. Also ist die Anzahl der verschiedenen Ternen $= \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = n_3$. — Durch Verallgemeinerung dieser Schlußweise findet man, daß, wenn man die Anzahl der Combinationen von n Elementen zur p^{ten} Klasse mit $NC^p(123 \cdots n)$ bezeichnet, bei **nicht** gestatteter Wiederholung

$$NC^p(123 \cdots\cdots n) = \frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots p} = n_p \text{ ist.}$$

§ 141 [§ 134]. Aufgabe.

Die Anzahl der aus einem Zeiger von n Elementen möglichen Combinationen der p^{ten} Klasse **mit Wiederholung** zu bestimmen.

Aufl. Die Anzahl der Unionen ist jedenfalls wieder n. — Jede Union liefert 2 Amben, indem man ihr dasselbe Element vorsetzt oder anhängt, und außerdem noch n — 1 Amben, indem man jedes der n — 1 übrigen Elemente ihr so beifügt, daß keine Inversion entsteht; also liefert jede Union n + 1 Amben, und deshalb liefern alle Unionen zusammen n (n + 1) Amben; da aber von diesen Amben wieder, wie im vorigen §, je zwei einander gleich sind, so ist die Anzahl der verschiedenen Amben $= \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} = (n+1)_2$. — Jede Ambe mit 2 gleichen Elementen liefert zunächst 3 identische Ternen, wenn man ihr dasselbe Element noch einmal vorsetzt, einschiebt oder anhängt; sie liefert außerdem noch n — 1 Ternen, indem man ihr jedes der

übrigen n — 1 Elemente so beifügt, daß keine Inversion entsteht. Aus jeder Ambe mit zwei gleichen Elementen entstehen also n + 2 Ternen. Jede Ambe mit 2 verschiedenen Elementen giebt 4 paarweise gleiche Ternen, indem man jedes der beiden darin enthaltenen Elemente vor- oder nachsetzt und einschiebt, und außerdem noch n — 2 Ternen, indem man jedes der n — 2 übrigen Elemente so beifügt, daß keine Inversion entsteht. Jede Ambe führt also zu n + 2 Ternen, und deshalb führen alle Amben zusammen zu $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \cdot (n+2)$ Ternen. Je drei von diesen Ternen sind aber einander gleich. So z. B. ist die Terne aaa aus der Ambe aa entstanden durch Verbindung mit jedem der beiden darin enthaltenen Elemente und mit dem gegebenen Elemente a. Ebenso kommt die Terne aab dreimal vor, da sie einmal durch Combination der Ambe aa mit dem Elemente b und zweimal durch Combination der Ambe ab mit dem darin enthaltenen Elemente a und mit dem gegebenen Elemente a entstanden ist. Endlich ist die Terne abc entstanden durch Combination der Ambe ab mit dem Elemente c, der Ambe ac mit dem Elemente b und der Ambe bc mit dem Elemente a. Dasselbe gilt von allen übrigen Ternen. Die Anzahl der verschiedenen Ternen ist also $= \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = (n+2)_3$. — Durch analoge Schlüsse ergiebt sich allgemein, daß im Falle gestatteter Wiederholung

$$NC^p(123 \cdots\cdots n) = \frac{n(n+1)(n+2) \cdots\cdot (n+p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdot p}$$
$$= (n+p-1)_p \text{ ist.}$$

Anmerkung. Der Bruch rechts heißt die p^{te} steigende getheilte Factorielle von n.

c) Variiren.

§ 142 [§ 135].

Auch beim Variiren muß seinem Begriffe nach der Klassenexponent gegeben sein. Ferner unterscheidet man auch hierbei ein Variiren ohne und mit gestatteter Wiederholung. Da das Variiren eine Vereinigung von Combiniren und Permutiren ist, so wird man alle möglichen Formen eines gegebenen Zeigers in einer solchen Folge, welche ein Vergessen einer Form unmöglich macht, erhalten, wenn man zuerst aus dem gegebenen Zeiger alle Combinationen bildet und dann jede Combination als Zeiger permutirt.

§ 143 [§ 136]. Aufgabe.

Die Anzahl der aus einem Zeiger von n Elementen möglichen Variationen zur p^{ten} Klasse **ohne Wiederholung** zu bestimmen.

Aufl. Man bildet die Variationen von n Elementen zur p^{ten} Klasse, wenn keine Wiederholung gestattet ist, indem man in den einzelnen Combinationen derselben Klasse ohne Wiederholung alle Elemente permutirt. Da die Anzahl der Combinationen zur p^{ten} Klasse aus n Elementen, im Falle keine Wiederholungen gestattet sind, $= n_p$, d. h. $= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots p}$ ist, und da jede solche Combination mit p verschiedenen Elementen p! Permutationen giebt, so ist die gesuchte Anzahl der Variationen zur p^{ten} Klasse ohne Wiederholung bei n Elementen $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$.

§ 144 [§ 137]. Aufgabe.

Die Anzahl der aus einem Zeiger von n Elementen möglichen Variationen zur p^{ten} Klasse **mit Wiederholung** zu bestimmen.

Aufl. Jede der n Unionen giebt, wenn man ihr jedes der vorhandenen n Elemente anhängt, n Amben, also ist die Totalanzahl der Amben in diesem Falle $= n^2$. — Jede der n^2 Amben giebt, weil ihr wieder jedes der vorhandenen n Elemente angehängt werden kann, n Ternen, also ist die Gesammtzahl der möglichen Ternen $= n^3$. — Ebenso lassen sich die Schlüsse weiter fortsetzen. Demnach ist die gesuchte Anzahl der Variationen von n Elementen zur p^{ten} Klasse bei gestatteter Wiederholung $= n^p$.

XIII. Kapitel.

Binomischer Lehrsatz.

§ 145 [§ 138] (Heis § 92).

Die Newtonsche Binomialformel.

Nach dem Begriffe der Potenz ist

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+2ab+b^2$;

$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$;

$(a+b)^5 = (a+b)^4(a+b) = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$;

u. s. w.

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens läßt sich jede Potenz des Binomiums $(a+b)$, deren Exponent eine ganze positive Zahl ist, successive entwickeln. Da aber diese Entwicklung bei jeder Potenz auf alle ihre Vorgänger recurriren muß und dadurch sehr weitläufig wird, so ist es wünschenswerth, das allgemeine Gesetz zu kennen, nach welchem $(a+b)^n$ unmittelbar ohne Benutzung der Vorgänger gebildet werden kann. Dieses Gesetz nun giebt der binomische Lehrsatz oder die Newtonsche Binomialformel:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \cdots\cdots + \frac{n}{1}ab^{n-1} + b^n \text{ oder}$$

$$= a^n + n_1 a^{n-1}b + n_2 a^{n-2}b^2 + n_3 a^{n-3}b^3 + \cdots\cdots + n_{n-1}ab^{n-1} + b^n.$$

Beweis. Es ist

$$(a+b)^n = \overset{(1)}{(a+b)}\,\overset{(2)}{(a+b)}\,\overset{(3)}{(a+b)}\cdots\cdots\overset{(n)}{(a+b)};$$

also erhält man alle möglichen Glieder der die n^{te} Potenz von $(a+b)$ darstellenden Reihe, wenn man aus dem Zeiger ab alle möglichen Variationen der n^{ten} Klasse mit Wiederholung bildet und die Elemente jeder Variation als Factoren, die Variation selbst also als Produkt betrachtet. Da aber alle solche Produkte, welche nur durch die Stellung der Factoren sich unterscheiden, einander gleich sind, so werden stets Gruppen von Formen identisch werden und die übrig bleibenden wirklich verschiedenen Formen werden die Combinationen der n^{ten} Klasse mit Wiederholung aus dem Zeiger (ab), als Produkte betrachtet, sein. Um demnach gleichzeitig sowohl die wirklich verschiedenen Glieder, als auch die Anzahl der identisch werdenden Formen jeder Gruppe zu erhalten, muß man, gemäß § 142, die Variationen von (ab) so bilden, daß man erst die Combinationen bildet, dann jede Combination als Zeiger permutirt und endlich die Elemente als Factoren, die Variationen also als Produkte ansieht; die Wiederholungsexponenten der Elemente der Variationen werden dadurch zu Potenzexponenten. Auf diese Weise ergeben sich als Hauptgrößen der einzelnen Glieder successive

$$a^n,\ a^{n-1}b,\ a^{n-2}b^2,\ a^{n-3}b^3,\cdots\cdots ab^{n-1},\ b^n.$$

Jedes dieser Glieder kommt unter den aus dem Zeiger ab zu bildenden Variationen der n^{ten} Klasse mit Wiederholung so oft vor, als die zugehörige Permutationszahl angiebt, wenn die Factoren als Elemente, die Potenzexponenten als Wiederholungsexponenten angesehen werden. Da nun aber dem Zeiger $(\overset{(1)}{a}\ \overset{(2)}{a}\ \overset{(3)}{a}\ \overset{(4)}{a}\cdots\cdots\overset{(n-s)}{a}\ \overset{(1)}{b}\ \overset{(2)}{b}\ \overset{(3)}{b}\cdots\cdots\overset{(s)}{b})$ oder kürzer $(a^{n-s}b^{s})$ nach § 135 die Permutationszahl

$$\frac{(n-s+s)!}{(n-s)!\,s!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-s+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots s} = n_s$$

zugehört, so ist das Glied $a^{n-s}b^s$ unter den durch Variiren gebildeten Gliedern $n_s$mal vorhanden, giebt also beim Zusammenziehen das eine Glied $n_s a^{n-s} b^s$.

Hieraus erhält man für $s = 1, 2, 3, \cdots\cdots, (n-1)$ die Glieder

$$n_1 a^{n-1} b,\ n_2 a^{n-2} b^2,\ n_3 a^{n-3} b^3, \cdots\cdots, n_{n-1} a\, b^{n-1}.$$

Nimmt man zu ihnen noch die nur einmal vorkommenden Glieder a^n und b^n, so ist für ganze positive n

$$(a+b)^n = a^n + n_1 a^{n-1} b + n_2 a^{n-2} b^2 + \cdots\cdots + n_{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

Zusatz 1. Hat man $(a-b)^n$ zu entwickeln, so kann man, da b in Bezug auf sein Vorzeichen nicht beschränkt ist, dieses als

$$\{a + (-b)\}^n \text{ auffassen}$$

und so die Entwicklung auf die vorstehende zurückführen. Die Glieder wechseln dabei ihre Vorzeichen, je nachdem der Potenz-Exponent von $(-b)$ gerade oder ungerade ist.

Zusatz 2. Ist der Exponent n eine gebrochene oder negative Zahl, so gilt die vorhergehende Beweisführung nicht, die Reihe wird dann eine unendliche und ist nur in gewissen Fällen anwendbar. Die Betrachtung dieses Falles überschreitet die Grenzen der Elementarmathematik.

§ 146 [§ 139] (Heis § 93).

Eigenschaften der Binomialcoëfficienten.

Die Coëfficienten 1 oder $n_0, n_1, n_2, n_3, \cdots\cdots$, bis n_n oder 1 heißen die Binomialcoëfficienten der n^{ten} Potenz; sie haben mehrere wichtige Eigenschaften.

Zunächst ist schon im § 135 bewiesen, daß

1) $$n_p = n_{n-p},$$

d. h. je 2 gleich weit vom Anfange und Ende der Reihe entfernte Coëfficienten sind gleich.

Da aber weiter nach der Entwicklung in § 145

$$n_0 + n_1 + n_2 + \cdots\cdots + n_n$$

gleich der Anzahl der Variationen der n^{ten} Klasse aus 2 Elementen mit gestatteter Wiederholung ist, und da diese Anzahl nach § 144 $= 2^n$ ist, so ist

2) $$n_0 + n_1 + n_2 + \cdots\cdots + n_n = 2^n.$$

Ferner ist

$$n_{p-1} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-p+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(p-1)}$$

$$n_p = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-p+2)(n-p+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(p-1)p}, \text{ also}$$

$$n_{p-1} + n_p = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-p+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(p-1)}\cdot\left(1+\frac{n-p+1}{p}\right)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-p+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(p-1)}\cdot\frac{(n+1)}{p}$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1)\cdots\cdots(n-p+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots p}$$

3) $n_p + n_{p-1} = (n+1)_p$.

Erweiterung des binomischen Lehrsatzes.

§ 147 [§ 140].

Soll man $(a+b+c)^n$ entwickeln, so erhält man ebenso die Hauptgrößen sämmtlicher Glieder, wenn man aus dem Zeiger (abc) sämmtliche Combinationen der n^{ten} Klasse mit Wiederholung bildet und jede Form als Produkt betrachtet. Jedes dieser Glieder ist so oft vorhanden, als sich das ihm zugehörige Produkt aus n Factoren permutiren läßt, wenn man seine Factoren als Elemente und die Potenzexponenten als Wiederholungsexponenten ansieht. Da aber dem Zeiger $(a^r b^s c^t)$, wo $r+s+t=n$ ist, die Permutationszahl $\frac{n!}{r!\,s!\,t!}$ zugehört, so ist der Binomialcoëfficient des Gliedes $a^r b^s c^t$ dieser Permutationszahl gleich, also lautet dieses Glied

$$\frac{n!}{r!\,s!\,t!}\,a^r b^s c^t.$$

Alle Glieder der Reihe erhält man, wenn man r, s und t alle möglichen Werthe zwischen 0 und n annehmen läßt, so daß stets die Bedingung $r+s+t=n$ erfüllt ist.

Dieselbe Schlußfolge gilt für die Entwicklung der n^{ten} Potenz irgend eines Polynomiums durch den sogenannten polynomischen Lehrsatz, wenn n eine positive ganze Zahl ist.

Anhang I.

Von der Theilbarkeit der ganzen Zahlen.

(Heis § 27. 28.)

§ 148 [§ 150]. Erklärungen.

Eine Zahl a heißt ein Theiler oder ein Maß einer anderen Zahl b, wenn es eine dritte ganze Zahl c der Art giebt, daß $a\cdot c = b$,

d. h. wenn der Quotient (b : a) eine ganze Zahl ist. Die Zahl b heißt in umgekehrter Auffassung ein Vielfaches oder ein Dividuus von a.

Jede Zahl hat die 1 und sich selbst zum Maße; hat eine Zahl gar kein anderes Maß, als 1 und sich selbst, so heißt sie eine absolute Primzahl. Die absoluten Primzahlen zwischen 1 und 100 sind:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Alle Zahlen, welche keine Primzahlen sind, heißen zusammengesetzte Zahlen. Diejenigen von ihnen, welche Vielfache von 2 sind, heißen gerade Zahlen; ihre allgemeine Form ist deshalb $2n$, wo n irgend eine ganze Zahl ist. Alle übrigen Zahlen werden ungerade genannt; ihre allgemeine Form ist $2n + 1$.

Eine Zahl, welche in zwei oder mehreren anderen Zahlen ohne Rest aufgeht, heißt ein gemeinschaftliches Maß (gemeinschaftlicher Theiler) dieser Zahlen.

Haben zwei Zahlen kein anderes gemeinschaftliches Maß, als die 1, so heißen sie relative Primzahlen zu einander, z. B. 8 und 15.

§ 149 [§ 151]. Lehrsätze.

1) Absolute Primzahlen sind auch relative Primzahlen zu einander.

Beweis aus § 148.

2) Das Maß einer Zahl ist auch ein Maß jedes Vielfachen (Dividuus) der Zahl.

Beweis einfach.

3) Das gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen ist auch ein Maß ihrer Summe oder Differenz.

Beweis. Ist c ein Maß von a und von b, so ist sowohl a, als auch b ein Vielfaches von c, also ist $a = mc$

und $b = nc$.

Daher ist $a \pm b = mc \pm nc = (m \pm n)\, c$,

also ist $a \pm b$ ein Vielfaches (Dividuus) von c, d. h. c ist ein Maß von $a \pm b$.

Anmerkung. Dieser Satz läßt sich auf die algebraische Summe mehrerer Zahlen und mit Hilfe von 2) sogar auf die algebraische Summe beliebiger Vielfachen mehrerer Zahlen erweitern.

§ 150 [§ 152]. Lehrsätze.

Wenn bei der Division einer Zahl durch eine andere ein Rest bleibt, so ist

1) jedes gemeinschaftliche Maß von Dividendus und Divisor auch ein Maß des Restes;

2) jedes gemeinschaftliche Maß des Divisors und des Restes auch ein Maß des Dividendus.

Beweis 1. Giebt a:b als Quotienten q, als Rest r, so ist

$$a = qb + r, \text{ also } r = a - qb.$$

Ist nun die Zahl c ein Maß sowohl von a, als auch von b, so ist sie nach § 149,2 auch ein Maß von qb, folglich nach § 149,3 auch von a — qb; also ist c ein Maß von r.

Beweis 2 analog.

§ 151 [§ 153]. Aufgabe.

Das größeste gemeinschaftliche Maß (den größesten gemeinschaftlichen Theiler) zweier Zahlen zu finden.

Auflösung. Man dividire die größere Zahl durch die kleinere, die kleinere durch den Rest und so fort jeden Divisor durch den zugehörigen Rest, bis die Division aufgeht; dann ist der letzte Divisor das gesuchte größeste gemeinschaftliche Maß.

Beispiel. Das größeste gemeinschaftliche Maß von 2047 und 3151 zu finden.

```
2047|3151|1
     2047
     1104|2047|1
          1104
           943|1104|1
                943
                161|943|5
                    805
                    138|161|1
                        138
                         23|138|6
                            138
```

also ist 23 das gesuchte Maß.

Beweis. 23 ist ein gemeinschaftliches Maß des vorletzten Restes 23 und des dazugehörigen Divisors 138, also ist es auch ein Maß des Dividendus 161; weil es weiter ein gemeinschaftliches Maß des Restes 138 und des zugehörigen Divisors 161 ist, so ist es auch ein Maß des Dividendus 943. Ebenso findet man weiter, daß 23 ein gemeinschaftliches Maß von 2047 und 3151 ist. — Daß aber 23 das größeste derartige Maß sein muß, folgt daraus, daß ein vorhandenes größeres gemeinschaftliches Maß von 2047 und 3151 auch ein Maß des Restes 1104, dann in derselben Schlußfolge auch ein Maß der folgenden Reste 943, 161, 138 und schließlich auch ein Maß von 23 sein müßte, ein Absurdum, da es größer sein soll als 23.

Zusatz. Das größeste gemeinschaftliche Maß mehrerer Zahlen findet man, wenn man dasselbe zunächst für zwei der Zahlen aufsucht, dann zu

dem gefundenen Maße und einer dritten der gegebenen Zahlen wieder das gemeinschaftliche Maß sucht u. s. w.

Anmerkung 1. Stößt man im Laufe der Rechnung auf einen Rest, der eine absolute Primzahl ist und in dem vorhergehenden Reste nicht aufgeht, so kann man die Rechnung abbrechen, weil dann die beiden gegebenen Zahlen relative Primzahlen sind. Dasselbe ist der Fall, wenn sich als letzter Rest 1 ergiebt, was im ungünstigsten Falle immer stattfinden muß.

Anmerkung 2. Haben a und b das größeste gemeinschaftliche Maß c, so ist für am und bm das größeste gemeinschaftliche Maß natürlich = cm.

§ 152 [§ 154]. Lehrsätze.

1) Wenn eine Zahl m gegen zwei andere Zahlen, a und b, relative Primzahl ist, so ist sie es auch gegen das Produkt derselben.

Beweis. Da m gegen a relative Primzahl ist, so wird, wenn man a durch m, m durch den Rest u. s. w. dividirt, zuletzt der Rest 1 bleiben müssen. Nimmt man an, daß dieses nach n Divisionen geschieht, so müssen folgende Gleichungen richtig sein:

$$a = mq_1 + r_1,$$
$$m = r_1q_2 + r_2,$$
$$r_1 = r_2q_3 + r_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + 1,$$

oder

$$a - mq_1 = r_1,$$
$$m - r_1q_2 = r_2,$$
$$r_1 - r_2q_3 = r_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$r_{n-2} - r_{n-1}q_n = 1.$$ Daraus folgt:

$$ab - mbq_1 = r_1b,$$
$$mb - r_1bq_2 = r_2b,$$
$$r_1b - r_2bq_3 = r_3b,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$r_{n-2}b - r_{n-1}bq_n = b.$$

Wäre nun ab ein Vielfaches von m, so wäre auch ab — mbq ein solches, also auch r_1b; wäre aber r_1b durch m theilbar, so wäre dieses auch mit r_1bq_2 der Fall, also auch mit $mb - r_1bq_2$, und deshalb auch mit r_2b. Durch Fortsetzung dieser Schlußweise führt die Annahme, m sei ein Maß

von ab, zu dem Resultate, daß dann nothwendig auch m ein Maß von b sein müßte. Letzteres ist nun gegen die Voraussetzung, also kann auch m kein Maß von ab sein.

Anmerkung. Dasselbe gilt vom Produkte mehrerer Zahlen.

2) Wenn ein Maß eines Produktes gegen den einen Factor relative Primzahl ist, so muß es ein Maß des anderen Factors sein.

Der Beweis hierfür liegt in der vorhergehenden Schlußfolge.

3) Folgerung. Jede Primzahl, welche kein Maß zweier Zahlen ist,. ist auch kein Maß ihres Produktes; jede Primzahl aber, welche ein Maß eines Produktes ist, ist ein Maß wenigstens eines Factors desselben.

4) Die Potenzen zweier relativer Primzahlen sind selbst relative Primzahlen zu einander.

Beweis. Wenn a gegen b relative Primzahl ist, so ist a auch gegen bb relative Primzahl, also ist auch bb gegen aa relative Primzahl u. s. w.

Hieraus folgt,. daß, wenn $\frac{a}{b}$ ein in den kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch ist, auch $\frac{a^m}{b^m}$ ein solcher ist, also keine ganze Zahl sein kann; und daraus folgt weiter,

daß die Wurzel aus einer ganzen Zahl entweder eine ganze Zahl ist, oder sich, selbst durch einen Bruch, nicht genau darstellen läßt, also irrational ist. (Vergl. § 77.)

§ 153 [§ 155].

Zerlegung einer Zahl in ihre Primfactoren.

Will man eine ganze Zahl als ein Produkt aus Primzahlen darstellen — in ihre Primfactoren zerlegen —, so dividirt man sie zunächst so oft als möglich hinter einander durch die kleinste Primzahl 2, den schließlich erhaltenen Quotienten in derselben Weise durch 3, 5 u. s. w. Die sämmtlichen Divisoren, und der letzte nicht weiter dividirbare Quotient sind dann die Primfactoren. Zur Abkürzung kann man durch diejenigen Primfactoren zuerst dividiren, von denen man weiß, daß sie ein Maß der gegebenen Zahl sind.

Wie man hierbei auch die Reihenfolge der Divisionen ändert, schließlich gelangt man stets zu denselben Primfactoren.

Denn wäre eine Zahl einmal $= a \cdot b \cdot c \cdot d$, gleichzeitig aber auch

$= \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta$, wo a, b, c, d sowohl, als $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Primzahlen sind, so muß α, da es in der Zahl aufgeht, auch in abcd aufgehen; daraus folgt nach § 152,3, daß α in einem der Factoren a, b, c, d aufgeht; da aber alle diese Factoren Primzahlen sind, so muß α mit einem jener Factoren identisch sein. Dasselbe gilt natürlich von β, γ, δ.

§ 154 [§ 156]. Aufgabe.

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Zahlen zu finden.

Auflösung. Man zerlegt jede der gegebenen Zahlen in ihre Primfactoren und bildet dann dasjenige Produkt, welches jeden der Primfactoren so oft enthält, als die Zahl, in welcher er am häufigsten vorkommt. Zahlen, welche in anderen aufgehen, können dabei unberücksichtigt bleiben.

Beweis einfach aus § 149,2 und § 153.

§ 155 [§ 157].

Anwendung auf die Theilbarkeit dekadischer Zahlen.

1) Eine Zahl ist durch 2 theilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine Null oder durch 2 theilbar ist;

denn schließt die Zahl mit Null, so ist sie ein Produkt, dessen einer Factor die durch 2 theilbare Zahl 10 ist, also tritt § 149,2 ein; schließt sie mit einer geraden Ziffer, so ist sie die Summe aus einem durch 2 theilbaren Vielfachen von 10 und der durch 2 theilbaren letzten Ziffer, also tritt § 149,3 ein.

2) Eine Zahl ist durch 4, 8, 16 u. s. w. theilbar, wenn sie am Ende 2, 3, 4 u. s. w. Nullen hat oder wenn der als Zahl betrachtete Complex der 2, 3, 4 u. s. w. letzten Ziffern durch 4, 8, 16 u. s. w. theilbar ist.

Grund ähnlich.

3) Eine Zahl ist durch 5 theilbar, wenn sie mit 0 oder 5 schließt, und durch 25, wenn ihre beiden letzten Ziffern Nullen sind oder eine durch 25 theilbare Zahl bilden.

Grund wie bei 1.

4) Eine Zahl ist durch 3 oder 9 theilbar, wenn die Summe ihrer Ziffern (ihre Quersumme) durch 3 oder 9 theilbar ist.

Beweis. Schreibt man die Zahl in ihrer dekadischen Form, so ist sie eine Summe der durch die Ziffern repräsentirten Vielfachen der

Potenzen von 10. Da nun jede Potenz von 10 bei der Division durch 3 oder 9 den Rest 1 läßt, so läßt sich jede Ziffer der Zahl als die Summe eines Vielfachen von 3 oder 9 und der Ziffer ansehen, also kann die gegebene Zahl durch eine Summe ersetzt werden, deren einer Addend das Gesammtvielfache von 3 oder 9, und deren anderer Addend die Summe der Ziffern ist. Wenn nun die Summe der Ziffern auch ein Vielfaches von 3 oder 9 ist, so muß nach § 149,3 die gegebene Zahl durch 3 oder durch 9 theilbar sein.

Anhang II.

Von den Reihen höherer Ordnungen.

§ 156 [§ 141]. Erklärung.

Bildet man aus einer Reihe

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \cdots\cdot$$

durch Subtraction je zweier Nachbarglieder die neue Reihe

$$x_2 - x_1, x_3 - x_2, x_4 - x_3, x_5 - x_4, x_6 - x_5, \cdots\cdot,$$

deren Glieder demnach die successiven Differenzen je zweier aufeinanderfolgenden Glieder der gegebenen Reihe sind, so heißt die neue Reihe die erste Differenzenreihe der gegebenen. Verfährt man mit ihr auf dieselbe Weise, so erhält man die zweite Differenzenreihe der gegebenen Reihe und so fort. Eine solche Reihe, deren m^{te} Differenzenreihe nur gleiche Glieder enthält, oder, wie man sich ausdrückt, eine Reihe 0^{ter} Ordnung ist, heißt eine arithmetische Reihe der m^{ten} Ordnung.

So giebt z. B. die Reihe der Cuben der natürlichen Zahlen

	1,	8,	27,	64,	125	u. s. w.
als erste Differenzenreihe	7,	19,	37,	61		u. s. w.,
als zweite „		12,	18,	24,		u. s. w.,
als dritte „			6,	6		u. s. w.;

also ist sie eine Reihe der 3^{ten} Ordnung.

Anmerkung. Da bei der Bildung der successiven Differenzenreihen je ein Glied verloren geht, und schließlich mindestens 2 Glieder bleiben müssen, so muß man von der ursprünglichen Reihe, deren Charakter man untersuchen will, nicht zu wenig Glieder nehmen.

§ 157 [§ 142]. Erklärung.

Bildet man aus einer Reihe

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \cdots\cdot,$$

eine neue Reihe

$a,\ a+x_1,\ a+x_1+x_2,\ a+x_1+x_2+x_3,\ a+x_1+x_2+x_3+x_4$ u. s. w. in der Art, daß das r^{te} Glied der neuen Reihe gleich der um dieselbe constante Größe vermehrten Summe der $(r-1)$ ersten Glieder der gegebenen Reihe ist, so heißt die neue Reihe eine Summenreihe der gegebenen. Verfährt man mit ihr in derselben Weise, so liefert sie eine zweite Summenreihe und so fort. In dieser Auffassung ist also eine Reihe p^{ter} Ordnung die Summenreihe ihrer ersten Differenzenreihe, deren constante Größe das Anfangsglied der gegebenen Reihe ist; die erste Differenzenreihe ist ihrestheils wieder die Summenreihe der zweiten, deren constante Größe das erste Glied der ersten Differenzenreihe ist, und so fort, so daß schließlich die Reihe p^{ter} Ordnung die p^{te} Summenreihe einer gewissen Reihe 0^{ter} Ordnung, nämlich ihrer p^{ten} Differenzenreihe ist. So ist z. B. die obige Reihe

1, 8, 27, 64, 125 u. s. w.

die Summenreihe, welche aus der Reihe

7, 19, 37, 61 u. s. w.

mit Hilfe der constanten Größe 1 gebildet wird; die Reihe

7, 19, 37, 61 u. s. w.

ist eine Summenreihe, gebildet aus der Reihe

12, 18, 24 u. s. w.

mit Hilfe der constanten Größe 7; und endlich ist die Reihe

12, 18, 24 u. s. w.

die Summenreihe, welche aus der Reihe 0^{ter} Ordnung

6, 6, 6 u. s. w.

mit Hilfe der constanten Größe 12 abgeleitet ist.

§ 158 [§ 143] (Heis § 93).

Die wichtigsten Reihen höherer Ordnungen sind die sogenannten figurirten Zahlen und die Polygonalzahlen.

Erstere sind die Glieder der successiven Summenreihen der Reihe der natürlichen Zahlen, gebildet mit Hilfe der constanten Größe 0. Die erste figurirte Zahl jeder Ordnung ist gleich 1. — Aus der Reihe der natürlichen Zahlen

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, u. s. w.

folgt als erste Summenreihe

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, u. s. w.

und hieraus als zweite Summenreihe

1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, u. s. w.

und so fort. Die Glieder der ersten Reihe bilden die figurirten Zahlen der 2^{ten} Ordnung (da die Reihe von der 2^{ten} Ordnung ist), die der zweiten heißen figurirte Zahlen 3^{ter} Ordnung und so fort.

Die Polygonalzahlen sind die Glieder gewisser Reihen 2^{ter} Ordnung, d. h. sie sind Glieder der ersten Summenreihe einer arithmetischen Progression, und zwar mit dem Anfangsgliede 1. — Die Reihe 1^{ter} Ordnung

$$1,\ 1+d,\ 1+2d,\ 1+3d,\ 1+4d,\ 1+5d,\ \cdots\cdots$$

liefert als erste Summenreihe

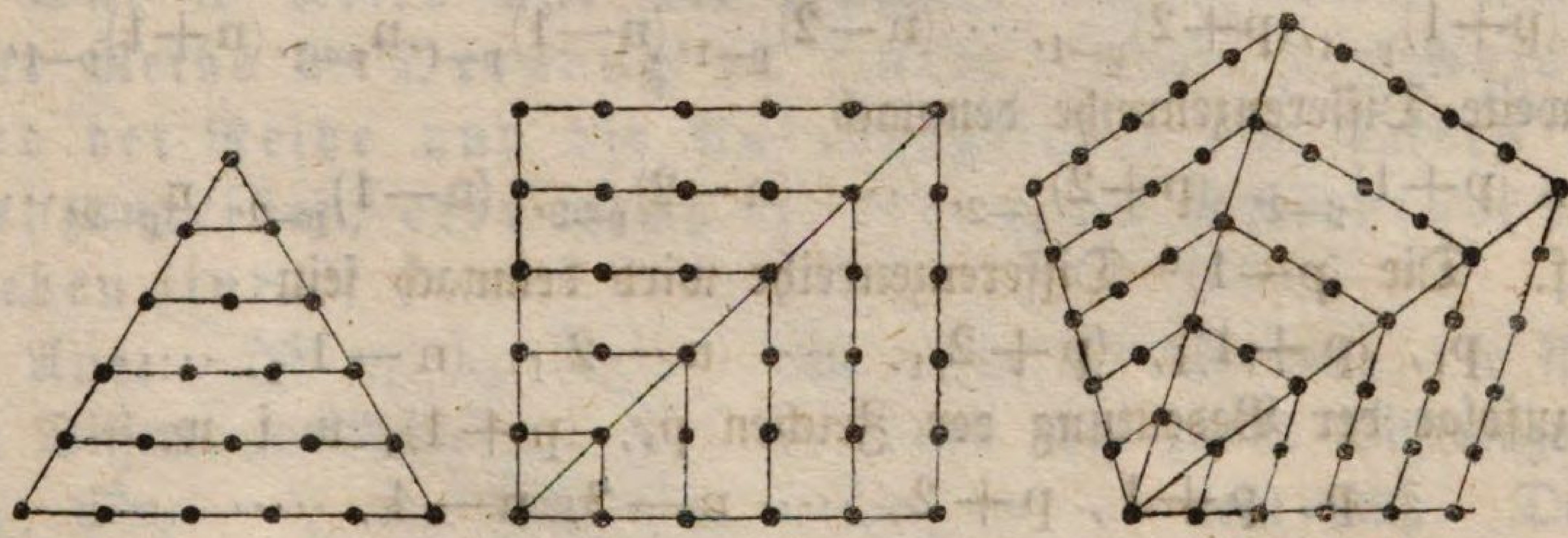
$$1,\ 2+d,\ 3+3d,\ 4+6d,\ 5+10d,\ 6+15d,\ \cdots\cdots$$

Aus dieser Reihe ergeben sich

für $d=1$ die Trigonalzahlen: 1, 3, 6, 10, 15, 21 ·····
für $d=2$ die Tetragonalzahlen: 1, 4, 9, 16, 25, 36 ·····
für $d=3$ die Pentagonalzahlen: 1, 5, 12, 22, 35, 51 ·····
. .
. .
. .
für $d=n-2$ die neckigen Zahlen 1, n, $3n-3$, $6n-8$, $10n-15$, $15n-24$ ·····

Anmerkung. Diese Zahlen haben den Namen Polygonal- (neckige) Zahlen von der Eigenschaft erhalten, daß man die Einheiten jeder dieser Zahlen, z. B. der p^{ten} neckigen Zahl zu $(p-1)$ ähnlichen nEcken mit einem gemeinsamen Scheitel zusammenstellen kann, wenn man die Einheiten der Zahlen durch Punkte darstellt.

Fig. 7.



Die Fig. 7 zeigt diese Darstellung für die ersten 6 drei-, vier- und fünfeckigen Zahlen. — Die p^{te} neckige Zahl heißt auch wohl das nEck der Zahl p. — Die dreieckigen Zahlen (die Trigonalzahlen) sind mit den figurirten Zahlen zweiter Ordnung identisch.

Die zweite Summenreihe obiger Reihe erster Ordnung ist

$$1,\ 3+d,\ 6+4d,\ 10+10d,\ 15+20d,\ 21+35d,\ \cdots\cdots$$

Hieraus ergeben sich für

$d=1$ die dreiseitigen Pyramidalzahlen: 1, 4, 10, 20, 35, 56⋯
$d=2$ die vierseitigen „ „ „ 1, 5, 14, 30, 55, 91⋯
$d=3$ die fünfseitigen „ „ „ 1, 6, 18, 40, 75, 126⋯
. .
. .
. .
. .
$d=n-2$ die $n$seitigen Pyramidalzahlen 1, $n+1$, $4n-2$, $10n-10$, $20n-25$, $35n-49$ ⋯⋯

Anmerkung. Die Einheiten der Pyramidalzahlen, welche Reihen 3ter Ordnung bilden, lassen sich zu ähnlichen $n$seitigen Pyramiden mit einer gemeinsamen Spitze zusammenstellen. — Die dreiseitigen Pyramidalzahlen sind mit den figurirten Zahlen 3ter Ordnung identisch.

§ 159 [§ 144]. Lehrsatz.

Die p^{ten} Binomialcoëfficienten der successiven Potenzen sind mit den figurirten Zahlen p^{ter} Ordnung identisch, d. h. sie bilden eine arithmetische Reihe p^{ter} Ordnung, deren $(p-1)^{te}$ Differenzenreihe die Reihe der natürlichen Zahlen ist.

Beh. Die Zahlen

$p_p,\ (p+1)_p,\ (p+2)_p,\ (p+3)_p,\ \cdots\ (n-2)_p,\ (n-1)_p,\ n_p,\ (n+1)_p,\ (n+2)_p,\ \cdots$

bilden eine Reihe p^{ter} Ordnung, deren $(p-1)^{te}$ Differenzenreihe die Reihe der natürlichen Zahlen ist.

Beweis. Als erste Differenzenreihe obiger Reihe ergiebt sich unter Benutzung der Gleichung 3 im § 146:

$$p_{p-1},(p+1)_{p-1},(p+2)_{p-1},\cdots(n-2)_{p-1},(n-1)_{p-1},n_{p-1},(n+1)_{p-1},\cdots;$$

als zweite Differenzenreihe demnach

$$p_{p-2},\ (p+1)_{p-2},\ (p+2)_{p-2},\cdots\cdots(n-2)_{p-2},\ (n-1)_{p-2},\ n_{p-2},\cdots\cdots$$

u. s. f. Die $(p-1)^{te}$ Differenzenreihe wird demnach sein

$$p_1,\ (p+1)_1,\ (p+2)_1,\ \cdots\ (n-2)_1,\ (n-1)_1,\ \cdots$$

oder zufolge der Bedeutung der Zeichen p_1, $(p+1)_1$ u. s. w.

$$p,\ p+1,\ p+2,\ \cdots\ n-2,\ n-1,\ \cdots$$

Die obige Reihe ist also eine Reihe p^{ter} Ordnung, deren Anfangsglied $p_p = 1$ ist.

Anmerkung 1. Die Differenzenreihen hätten auch so geschrieben werden können:
Die 1. Differenzenreihe: $p_1,\ (p+1)_2,\ (p+2)_3,\cdots(n-2)_{n-p-1},\ (n-1)_{n-p},\ n_{n-p+1},\cdots$
Die 2. Differenzenreihe: $p_2,\ (p+1)_3,\ (p+2)_4,\ \cdots\ (n-2)_{n-p}\ ,\ (n-1)_{n-p+1},\cdots$
u. s. w.

Zusatz. Als unmittelbare Folge obigen Lehrsatzes ergiebt sich die

Lösung der Aufgabe: Die n^{te} figurirte Zahl der p^{ten} Ordnung zu bestimmen.

Aufl. Die gesuchte Zahl ist die n^{te} in der Reihe der p^{ten} Binomialcoëfficienten. Das erste Glied dieser Reihe der p^{ten} Binomialcoëfficienten kommt bei der p^{ten} Potenz vor, das zweite Glied bei der $(p+1)^{ten}$ Potenz, und daher das n^{te} Glied bei der $(p+n-1)^{ten}$ Potenz. Die gesuchte Zahl heißt demnach $(p+n-1)_p = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots p}$, d. h. nach § 141 die p^{te} steigende getheilte Factorielle von n.

Anmerkung 2. Die n^{te} figurirte Zahl 2^{ter} Ordnung (die n^{te} Trigonalzahl) ist also $(n+2-1)_2 = (n+1)_2$, und die n^{te} figurirte Zahl 3^{ter} Ordnung (die n^{te} dreiseitige Pyramidalzahl) ist $(n+3-1)_3 = (n+2)_3$.

§ 160 [§ 145]. Aufgabe.

Die Summe der n ersten figurirten Zahlen p^{ter} Ordnung zu finden.

Aufl. Die Summe der n ersten Trigonalzahlen ist nach der Art ihrer Herleitung die n^{te} dreiseitige Pyramidalzahl, also $= (n+2)_3$. — Die Summe der n ersten dreiseitigen Pyramidalzahlen ist ebenso gleich der n^{ten} figurirten Zahl 4^{ter} Ordnung, also $= (n+3)_4$. — Allgemein ist die Summe der n ersten figurirten Zahlen p^{ter} Ordnung gleich der n^{ten} figurirten Zahl $(p+1)^{ter}$ Ordnung, also nach § 159 $= (n+p)_{p+1}$.

§ 161 [§ 146]. Aufgabe.

Das n^{te} Glied und die Summe der n ersten Glieder einer Reihe 2^{ter} Ordnung zu finden, wenn das Anfangsglied der Reihe und die Anfangsglieder der beiden Differenzenreihen, oder wenn die drei ersten Glieder der Reihe gegeben sind.

Aufl. Ist $x_1, x_2, x_3 \cdots\cdots$ eine Reihe 2^{ter} Ordnung, so ist ihre erste Differenzenreihe $d^1x_1, d^1x_2 \cdots\cdots$, und ihre zweite Differenzenreihe $d^2x_1, d^2x_2 \cdots\cdots$, wo aber $d^2x_1 = d^2x_2 = \cdots\cdots$ sein muß. Das n^{te} Glied der ersten Differenzenreihe ist nach § 157 gleich dem Anfangsgliede d^1x_1, vermehrt um die Summe der $(n-1)$ ersten Glieder der Reihe 0^{ter} Ordnung, also um $(n-1)d^2x_1$; es ist also das n^{te} Glied der ersten Differenzenreihe $= d^1x_1 + (n-1)d^2x_1$. — Da nun ebenso das n^{te} Glied der gegebenen Reihe 2^{ter} Ordnung gleich dem Anfangsgliede x_1 der Reihe, vermehrt um die Summe der $(n-1)$ ersten Glieder der ersten Differenzenreihe ist, so ist

$$x_n = x + d^1x_1 + (d^1x_1 + d^2x_1) + (d^1x_1 + 2d^2x_1) + (d^1x_1 + 3d^2x_1) + \cdots + \{d^1x_1 + (n-2)d^2x_1\}$$

$$= x_1 + (n-1)\,d^1x_1 + (1 + 2 + 3 + \cdots + \overline{n-2})d^2x_1.$$

Die Klammer ist die Summe der $(n-2)$ ersten natürlichen Zahlen, also die $(n-2)^{te}$ Trigonalzahl, und daher nach § 159 Anm. $= (n-2+1)_2 = (n-1)_2$; mithin ist das n^{te} Glied der gegebenen Reihe

1) $$x_n = x_1 + (n-1)_1\,d^1x_1 + (n-1)_2\,d^2x_1.$$

Bezeichnet man die Summe der n ersten Glieder der gegebenen Reihe 2^{ter} Ordnung mit s_n, so ist

$$s_n = x_1 + (x_1 + d^1x_1) + (x_1 + 2d^1x_1 + 2_2d^2x_1) + (x_1 + 3d^1x_1 + 3_2d^2x_1) + (x_1 + 4d^1x_1 + 4_2d^2x_1) + \cdots + \{x_1 + (n-1)\,d^1x_1 + (n-1)_2d^2x_1\}$$

oder

$$s_n = nx_1 + \{1 + 2 + 3 + \cdots + \overline{n-1}\}\,d^1x_1 + \{2_2 + 3_2 + 4_2 + \cdots + (n-1)_2\}\,d^2x_1.$$

Die erste Klammer ist die $(n-1)^{te}$ Trigonalzahl, also $= n_2$, die zweite ist die Summe der $(n-2)$ ersten Trigonalzahlen, also die $(n-2)^{te}$ dreiseitige Pyramidalzahl, d. h. $= (n-2+2)_3 = n_3$; folglich ist

2) $$s_n = nx_1 + n_2d^1x_1 + n_3d^2x_1.$$

§ 162 [§ 147]. Aufgabe.

Das n^{te} Glied und die Summe der n ersten Glieder einer Reihe 3^{ter} Ordnung zu bestimmen, wenn das Anfangsglied der Reihe und die Anfangsglieder der drei Differenzenreihen, oder wenn die vier ersten Glieder der Reihe gegeben sind.

Aufl. Ist $x_1, x_2, x_3, x_4 \cdots$ eine Reihe 3^{ter} Ordnung, und ist ihre erste Differenzenreihe

d^1x_1, d^1x_2, d^1x_3, d^1x_4 u. s. w.,

die 2^{te} d^2x_1, d^2x_2, d^2x_3, d^2x_4 u. s. w.,

die 3^{te} d^3x_1, d^3x_2, d^3x_3 u. s. w., wo alle Glieder gleich sein müssen, so ist die Summe der $(n-1)$ ersten Glieder der ersten Differenzenreihe, da sie eine Reihe 2^{ter} Ordnung ist, nach dem vorigen Paragraphen

$$= (n-1)d^1x_1 + (n-1)_2\,d^2x_1 + (n-1)_3\,d^3x_1;$$

das n^{te} Glied der Reihe 3^{ter} Ordnung ist gleich dieser Summe, vermehrt um das Anfangsglied x_1, d. h.

1) $$x_n = x_1 + (n-1)d^1x_1 + (n-1)_2\,d^2x_1 + (n-1)_3d^3x_1.$$

Ferner ist die Summe der n ersten Glieder der gegebenen Reihe

$$\begin{aligned} s_n = x_1 &+ (x_1 + d^1x_1) + (x_1 + 2d^1x_1 + 2_2d^2x_1) \\ &+ (x_1 + 3d^1x_1 + 3_2d^2x_1 + 3_3d^3x_1) \\ &+ (x_1 + 4d^1x_1 + 4_2d^2x_1 + 4_3d^3x_1) \\ &+ (x_1 + 5d^1x_1 + 5_2d^2x_1 + 5_3d^3x_1) \\ &+ \cdots + \{x_1 + (n-1)\,d^1x_1 + (n-1)_2d^2x_1 + (n-1)_3d^3x_1\} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} s_n = nx_1 + (1+2+3+\cdots\overline{n-1})\,d^1x_1 &+ \{2_2+3_2+4_2+\cdots+(n-1)_2\}d^2x_1 \\ &+ \{3_3+4_3+5_3+\cdots+(n-1)_3\}d^3x_1. \end{aligned}$$

Die erste Klammer ist, wie oben, $= n_2$, die zweite $= n_3$, die dritte ist die Summe der $(n-3)$ ersten figurirten Zahlen der dritten Ordnung, also die $(n-3)^{te}$ figurirte Zahl der vierten Ordnung, und deshalb $= (n-3+3)_4 = n_4$; folglich ist

2) $$s_n = nx_1 + n_2\,d^1x_1 + n_3\,d^2x_1 + n_4\,d^3x_1.$$

§ 163 [§ 148]. Aufgabe.

Das n^{te} Glied und die Summe der n ersten Glieder einer Reihe m^{ter} Ordnung zu finden, wenn ihr Anfangsglied und die Anfangsglieder der successiven Differenzenreihen, oder wenn die $(m+1)$ ersten Glieder der Reihe gegeben sind.

Aufl. Durch Fortsetzung der vorstehenden Betrachtungen erlangt man, daß allgemein für eine Reihe der m^{ten} Ordnung

1) $x_n = x_1 + (n-1)_1d^1x_1 + (n-1)_2d^2x_1 + \cdots + (n-1)_m d^mx_1$ und

2) $s_n = nx_1 + n_2d^1x_1 + n_3d^2x_1 + \cdots + n_{m+1}d^mx_1$ ist,

wo $d^1x_1,\ d^2x_1,\ d^3x_1, \cdots d^mx_1$ die Anfangsglieder der successiven Differenzenreihen sind.

§ 164 [§ 149]. Beispiele.

Die Quadrate der natürlichen Zahlen oder die Tetragonalzahlen 1, 4, 9, 16, 25, 36, u. s. w. geben als Differenzenreihen

3, 5, 7, 9, 11, u. s. w.

2, 2, 2, 2, u. s. w.

bilden also eine Reihe zweiter Ordnung; folglich ist die Summe der n ersten Quadratzahlen

$$= n_1 \cdot 1 + n_2 \cdot 3 + n_3 \cdot 2$$

$$= n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot 3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2$$

$$= n\left(1 + \frac{3n-3}{2} + \frac{n^2-3n+2}{3}\right)$$

$$= \frac{n(2n^2+3n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Die Pentagonalzahlen

1, 5, 12, 22, 35, 51, u. s. w.

geben als Differenzenreihen

4, 7, 10, 13, 16, u. s. w.

3, 3, 3, 3, u. s. w.

bilden also ebenfalls eine Reihe zweiter Ordnung; folglich ist die n^{te} Pentagonalzahl

$$x_n = 1 + (n-1) \cdot 4 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \cdot 3$$

$$= 1 + 4n - 4 + \frac{3n^2 - 9n + 6}{2} = \frac{3n^2-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Ferner ist die Summe der n ersten Pentagonalzahlen

$$s_n = n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot 4 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3$$

$$= n\left(1 + 2n - 2 + \frac{n^2-3n+2}{2}\right)$$

$$= \frac{n(n^2+n)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

Aehnlich sind die Rechnungen für andere arithmetische Reihen. Bemerkenswerth ist noch die Summenformel für die Cuben der natürlichen Zahlen, welche die Reihe 3^{ter} Ordnung

1, 8, 27, 64, 125, 216, ...

mit den Differenzreihen 7, 19, 37, 61, ...

12, 18, 24, ...

6, 6, ...

bilden. Die Summe der n ersten Cuben ist also

$$s_n = n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot 7 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 12 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 6$$

$$= n\left(\frac{n^3+2n^2+n}{4}\right) = n^2\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Andere interessante Beispiele liefern die Kugelhaufen. Man pflegt Kugeln in folgenden drei Formen aufzuhäufen, für welche jedes Mal die Summe der Kugeln des ganzen Haufens gefunden werden soll:

1. In einem Kugelhaufen von pyramidaler Form, des-

sen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist, ruht jede Kugel auf drei anderen. Die Summen der Kugeln in den einzelnen Schichten sind die figurirten Zahlen 2^{ter} Ordnung (Trigonalzahlen), und die Summe der Kugeln in n Schichten ist also $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

2. In einem Kugelhaufen von pyramidaler Form, dessen Grundfläche ein Quadrat ist, ruht jede Kugel auf vier anderen, deren Mittelpunkte die Eckpunkte eines Quadrates sind. Die Kugelsummen in den einzelnen Schichten sind die Tetragonalzahlen; die Summe aller Kugeln in n Schichten ist demnach $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. In einem Kugelhaufen in Dachform, dessen Grundfläche ein Rechteck ist, ruht jede Kugel auf vier anderen, deren Mittelpunkte die Eckpunkte eines Quadrates sind. Die Summen der Kugeln in den einzelnen Schichten bilden ebenfalls eine arithmetische Reihe 2^{ter} Ordnung, deren Anfangsglied die Anzahl der Kugeln in der oberften Reihe, etwa p, ist. Ein solcher Kugelhaufen enthält daher in n Schichten $\frac{n(n+1)(2n+3p-2)}{6}$ Kugeln.

§ 165. Erklärung und Aufgabe.

Aus einer gegebenen Reihe kann man durch Einschalten eines oder mehrerer Glieder zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Gliedern eine neue Reihe entstehen lassen, welche dasselbe Gesetz befolgt, als die gegebene Reihe. Dies Verfahren nennt man: ein oder mehrere Glieder interpoliren.

Aufgabe. Zwischen je zwei gegebenen Gliedern einer arithmetischen Reihe n^{ter} Ordnung p Glieder zu interpoliren.

Aufl. Durch das Interpoliren verwandelt sich
das 1., 2., 3., 4., ········ Glied der gegebenen Reihe in
das 1., $(p+2)$, $(2p+3)$, $(3p+4)$, ····· Glied der gesuchten Reihe.
Wenn man diese Glieder gleichsetzt, so erhält man n Gleichungen, aus denen die Anfangsglieder der n Differenzenreihen der gesuchten Reihe berechnet werden können. Alsdann werden die einzelnen Glieder der neu zu bildenden Reihe nach bekannten Formeln berechnet.

Beispiel. Gegeben die Reihe 3^{ter} Ordnung

1, 4, 10, 20 ····;

es sollen in derselben 2 Glieder interpolirt werden.

Das vierte Glied der neuen Reihe wird, wenn die Anfangsglieder ihrer drei Differenzenreihen mit d^1x, d^2x und d^3x bezeichnet werden, gleich sein

$$4 = 1 + 3\,d^1x + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}\,d^2x + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,d^3x.$$

Das siebente Glied der neuen Reihe ist

$10 = 1 + 6\,d^1x + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}\,d^2x + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, d^3x, und endlich ist das zehnte Glied

$20 = 1 + 9\,d^1x + \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2}\,d^2x + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,d^3x$. Aus diesen 3 Gleichungen findet man $d^1x = \frac{59}{81}$, $d^2x = \frac{7}{27}$ und $d^3x = \frac{1}{27}$. Die neue Reihe wird demnach sein:

$$1,\ \frac{140}{81},\ \frac{220}{81},\ 4,\ \frac{455}{81},\ \frac{616}{81},\ 10 \ldots\ldots$$

Zusatz. Für geometrische Reihen 1. Ordnung wie sie im § 110 betrachtet worden sind, gestaltet sich die Lösung der Aufgabe, p Glieder zu interpoliren, folgendermaßen:

Ist e der Exponent der gegebenen Reihe, und x der Exponent der durch Interpolation entstehenden Reihe, so muß

$$x^{p+1} = e \text{ oder } x = \sqrt[p+1]{e}$$

sein.

Anhang III.

Das Moivre'sche Theorem und seine Anwendung zur Lösung binomischer Gleichungen.

§ 166. Erklärung.

Jede complexe Größe, z. B. $a + bi$, kann unter der Form

$$r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

dargestellt werden, in welcher r eine reelle positive Zahl und φ einen Winkel zwischen 0 und 2π bezeichnet. Aus der Gleichung

$$a + bi = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

folgt nach § 85, daß

$$a = r\cos\varphi, \text{ und daß } b = r\sin\varphi$$

sein muß. Es ist deshalb, wenn die complexe Größe $a + bi$ auf die Form $r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ gebracht werden soll, zu setzen:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ und } \tan\varphi = \frac{b}{a}.$$

Der Quadratwurzel ist nur das Vorzeichen + zu geben, da r eine positive

Zahl sein soll. Mit Hilfe der zweiten Gleichung ist φ zunächst so zu bestimmen, daß $\tang \varphi$ gleich dem absoluten Werthe von $\frac{b}{a}$ wird; aus den Vorzeichen von a und b wird dann mit Berücksichtigung der Gleichungen $a = r \cos \varphi$ und $b = r \sin \varphi$ zu ermitteln sein, welchem der 4 Quadranten der Bogen φ angehört.

Die Größe r wird der modulus, der Bogen φ das Argument (oder die Amplitude) der complexen Zahl $a + bi$ genannt.

Anmerkung 1. Auch in der Form $r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ sind für $\varphi = 0$ die reellen Zahlen enthalten.

Anmerkung 2. In der Figur 6, § 85, welche die complexen Zahlen zur Anschauung bringt, ist die gerade Verbindungslinie des Nullpunktes mit dem die complexe Zahl $a + bi$ oder $r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ darstellenden Punkte P das Bild des modulus r, und der Winkel zwischen der horizontalen, die positiven Zahlen darstellenden Geraden und dieser Verbindungslinie OP das Bild des Winkels φ.

§ 167. Lehrsätze.

1) **Das Produkt zweier oder mehrerer complexer Zahlen ist gleich einer complexen Zahl, deren Modulus gleich dem Produkte der Moduli der Factoren, und deren Argument gleich der Summe der Argumente der Factoren ist.**

Beweis. $r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ wird durch Ausführung der Multiplikation gleich

$$r_1 r_2 \{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_1)\}$$
$$= r_1 r_2 \{\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)\}.$$

2) **Der Quotient zweier complexen Zahlen ist gleich einer complexen Zahl, deren Modulus gleich dem Quotienten der Moduli von Dividendus und Divisor, und deren Argument gleich der Differenz der Argumente von Dividendus und Divisor ist.**

Beweis. Man schreibe den Quotienten $r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) : r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ in Bruchform und erweitere den Bruch mit $\frac{1}{r_2} \cdot (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)$. Dann erhält man als Quotienten einen Bruch, dessen Nenner = 1, und dessen Zähler

$$= \frac{r_1}{r_2} \{\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)\} \text{ ist.}$$

Zusatz. Setzt man in $r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) : r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ den Modulus $r_1 = 1$ und das Argument $\varphi_1 = 0$, so geht dieser Quotient über in $\frac{1}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)}$; unter Benutzung des obigen Lehrsatzes

ist dieser Bruch gleichzeitig $= \frac{1}{r_2}(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)$. Es ist also

$$\frac{1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} = \cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2.$$

3) Eine complexe Größe wird mit einer ganzen Zahl potenzirt, indem man den Modulus mit der Zahl potenzirt und das Argument mit der Zahl multiplicirt.

Beweis 1. Wenn m eine positive ganze Zahl bezeichnet, so bedeutet $\{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\}^m$ ein Produkt von m Factoren, deren jeder gleich $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ist. Unter Anwendung des Lehrsatzes 1) dieses Paragraphen ist daher, wenn m eine positive ganze Zahl ist,

$$\{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\}^m = r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi).$$

Beweis 2. Wenn m eine negative ganze Zahl, z. B. $-n$, bezeichnet, so ist n eine positive ganze Zahl; und daher ist

$$\{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\}^m = \frac{1}{\{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\}^n} = \frac{1}{r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}.$$

Zufolge des Zusatzes in 2) ist aber $\frac{1}{\cos n\varphi + i\sin n\varphi} = \cos n\varphi - i\sin n\varphi$ oder $= \cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)$. Setzt man wieder m für $-n$, so ergiebt sich, daß auch dann

$$\{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\}^m = r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi)$$

ist, wenn m eine negative ganze Zahl ist.

Anmerkung. Dieser Lehrsatz, daß für jede ganze Zahl m

$$\{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\}^m = r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi)$$

ist, wurde zuerst von Moivre um das Jahr 1730 bewiesen und führt deshalb den Namen: Das **Moivre'sche Theorem**.

4) Jede Wurzel aus einer complexen Zahl hat eben so viele verschiedene Werthe, als der Wurzelexponent angiebt; diese Werthe werden gefunden, indem man den Modulus mit dem Wurzelexponenten radicirt und das um gewisse Vielfache von 2π vermehrte Argument durch den Wurzelexponenten dividirt.

Beweis. Nach der Erklärung des Radicirens ist $\sqrt[m]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$ diejenige Zahl, deren m^{te} Potenz gleich $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ist. Man setze deshalb:

$$\sqrt[m]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \varrho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

wo ϱ und ψ vorläufig unbekannte Größen sind. Da m eine ganze Zahl ist, so ist

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \{\varrho(\cos\psi + i\sin\psi)\}^m = \varrho^m(\cos m\psi + i\sin m\psi).$$

Daraus folgt, daß

$\varrho^m = r$, und $m\psi = \varphi + 2\varkappa\pi$, oder $\varrho = \sqrt[m]{r}$, und $\psi = \frac{\varphi + 2\varkappa\pi}{m}$ sein muß, wenn $\varkappa$ irgend eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet. Demnach ist

$$\sqrt[m]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[m]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\varkappa\pi}{m} + i\sin\frac{\varphi + 2\varkappa\pi}{m}\right).$$

Da aber alle diejenigen Argumente $\frac{\varphi + 2\varkappa\pi}{m}$, in welchen sich die Zahlen $\varkappa$ nur um ein ganzes Vielfache von m unterscheiden, dieselben coss. und dieselben sinn. besitzen, so hat man, um alle verschiedenen Werthe von $\sqrt[m]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$ zu erhalten, nur nöthig, die Größe $\varkappa$ in der Formel

$$\sqrt[m]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[m]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\varkappa\pi}{m} + i\sin\frac{\varphi + 2\varkappa\pi}{m}\right)$$

alle ganzen positiven und negativen Zahlenwerthe der Reihe

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\dots, \pm\left(\frac{m}{2} - 1\right), +\frac{m}{2} \text{ oder der Reihe}$$

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\dots, \pm\frac{m-1}{2},$$

durchlaufen zu lassen, je nachdem m eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Zusatz. Die Ausdehnung des Moivre'schen Theorems auf gebrochene Zahlen als Potenzexponenten hat nunmehr keine Schwierigkeiten.

§ 168. Aufgabe.

Den cos. oder sin. eines beliebigen ganzen Vielfachen eines Bogens φ durch den cos. und sin. des einfachen Bogens φ auszudrücken.

Auflösung. Wenn m eine positive ganze Zahl ist, so kann auf das Binom $(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^m$ der binomische Lehrsatz angewendet werden. Unter gleichzeitiger Benutzung des Moivre'schen Theorems erhält man auf diese Weise die Gleichungen:

$$\cos m\varphi + i\sin m\varphi = \cos^m\varphi + m_1 i\cos^{m-1}\varphi\cdot\sin\varphi - m_2\cos^{m-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi$$
$$- \cdots\cdots\cdots + (i)^m\sin^m\varphi.$$

$$\cos m\varphi - i\sin m\varphi = \cos^m\varphi - m_1 i\cos^{m-1}\varphi\cdot\sin\varphi - m_2\cos^{m-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi$$
$$+ \cdots\cdots + (-1)^m(i)^m\sin^m\varphi.$$

Durch Addition, bezüglich Subtraction und nachfolgende Division mit 2, bezüglich 2i, folgt hieraus (für jedes positive ganze m):

$$\cos m\varphi = \cos^m\varphi - m_2 \cos^{m-2}\varphi \cdot \sin^2\varphi + m_4 \cos^{m-4}\varphi \cdot \sin^4\varphi - \cdots$$
$$\sin m\varphi = m_1 \cos^{m-1}\varphi \cdot \sin\varphi - m_3 \cos^{m-3}\varphi \cdot \sin^3\varphi + m_5 \cos^{m-5}\varphi \cdot \sin^5\varphi - \cdots$$

§ 169. Aufgabe.

Irgend eine ganze positive Potenz des cos. oder sin. eines Winkels φ durch eine nach den coss. und sinn. der Vielfachen des Winkels φ fortschreitende Reihe auszudrücken.

Auflösung. Bezeichnet man das Binom $\cos\varphi + i \sin\varphi$ mit u und das Binom $\cos\varphi - i \sin\varphi$ mit v, so ist $2\cos\varphi = u + v$, und $2i \sin\varphi = u - v$.
Durch Potenziren mit einer positiven ganzen Zahl, z. B. m, erhält man:

$$\text{I)}\quad 2^m \cos^m\varphi = (u+v)^m = u^m + m_1 u^{m-1} v + m_2 u^{m-2} v^2 + \cdots + m_1 u v^{m-1} + v^m$$

$$\text{II)}\quad 2^m (i)^m \cdot \sin^m\varphi = (u-v)^m = u^m - m_1 u^{m-1} v + m_2 u^{m-2} v^2 - \cdots + (-1)^{m-1} m_1 u v^{m-1} + (-1)^m v^m.$$

Wenn nun $\varkappa$ irgend eine ganze Zahl bedeutet, so ist zufolge des Moivre'schen Theorems

$$u^\varkappa + v^\varkappa = 2\cos\varkappa\varphi,\quad u^\varkappa - v^\varkappa = 2i \sin\varkappa\varphi,\ \text{und}\ u^\varkappa v^\varkappa = 1. -$$

Ist demnach m eine gerade Zahl, z. B. $= 2n$, so ergiebt sich aus den Gleichungen I und II nach Division mit 2:

$$2^{2n-1} \cos^{2n}\varphi = \cos 2n\varphi + (2n)_1 \cos(2n-2)\varphi + (2n)_2 \cos(2n-4)\varphi + \cdots + (2n)_n$$

$$2^{2n-1} (-1)^n \sin^{2n}\varphi = \cos 2n\varphi - (2n)_1 \cos(2n-2)\varphi + (2n)_2 \cos(2n-4)\varphi - \cdots + (-1)^n (2n)_n.$$

Ist hingegen m eine ungerade Zahl, z. B. $= 2n + 1$, so ergiebt sich aus den Gleichungen I und II nach Division mit 2, bezüglich 2i:

$$2^{2n} \cos^{2n+1}\varphi = \cos(2n+1)\varphi + (2n+1)_1 \cos(2n-1)\varphi + (2n+1)_2 \cos(2n-3)\varphi + \cdots + (2n+1)_n \cos\varphi$$

$$2^{2n} (-1)^n \sin^{2n+1}\varphi = \sin(2n+1)\varphi - (2n+1)_1 \sin(2n-1)\varphi + (2n+1)_2 \sin(2n-3)\varphi - \cdots + (-1)^n (2n+1)_n \sin\varphi.$$

§ 170. Erklärung.

Eine binomische Gleichung n^{ten} Grades ist eine Gleichung, welche in der geordneten Form die Unbekannte nur in der n^{ten} und in

der 0^{ten} Potenz enthält. Die einfachste Form einer geordneten binomischen Gleichung n^{ten} Grades ist also

$$x^n = + 1 \text{ oder } x^n = - 1.$$

§ 171. Aufgabe.

Die binomische Gleichung $x^n = \pm 1$ aufzulösen.

Auflösung I. Da in der Form

$$a + bi \text{ oder } r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

alle Zahlen enthalten sind, so müssen auch die Wurzeln der gegebenen binomischen Gleichung $x^n = + 1$ die Form $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ besitzen. Setzt man daher $x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, so muß

$$x^n = + 1 = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

d. h. es muß $r^n \cos n\varphi = + 1$ und $r^n \sin n\varphi = 0$ sein. Da aber r nicht gleich Null sein kann, so ist $\sin n\varphi = 0$; und da gleichzeitig $r^n \cos n\varphi = + 1$ ist, so muß

$$r = 1, \text{ und } n\varphi = 2\varkappa\pi, \text{ also } \varphi = \frac{2\varkappa\pi}{n},$$

sein, wobei für $\varkappa$ irgend einer der im § 167 bezeichneten positiven oder negativen Zahlenwerthe zu setzen ist. Die Wurzeln der Gleichung $x^n = + 1$ besitzen demnach die Form: $x = \cos\frac{2\varkappa\pi}{n} + i \sin\frac{2\varkappa\pi}{n}$ und sind,

1) wenn n eine gerade Zahl ist:

für $\varkappa = 0$ oder $\frac{n}{2}$: $\quad + 1; \quad - 1;$

für $\varkappa = \pm 1$: $\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}; \quad \cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n};$

für $\varkappa = \pm 2$: $\cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}; \quad \cos\frac{4\pi}{n} - i\sin\frac{4\pi}{n};$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

für $\varkappa = \pm\left(\frac{n}{2} - 1\right)$: $\cos\frac{n-2}{n}\pi + i\sin\frac{n-2}{n}\pi; \quad \cos\frac{n-2}{n}\pi - i\sin\frac{n-2}{n}\pi.$

2) Wenn aber n eine ungerade Zahl ist, so sind die Wurzeln:

für $\varkappa = 0$: $\quad + 1;$

für $\varkappa = \pm 1$: $\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}; \quad \cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n};$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

für $\varkappa = \pm\left(\frac{n-1}{2}\right)$: $\cos\frac{n-1}{n}\pi + i\sin\frac{n-1}{n}\pi; \quad \cos\frac{n-1}{n}\pi - i\sin\frac{n-1}{n}\pi.$

Beispiel. Die 8 Wurzeln der Gleichung $x^8 = +1$ sind:

$$\pm 1;\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{2};\ \pm i;\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}.$$

Auflösung II. Ist aber die Gleichung $x^n = -1$ gegeben, so führen dieselben Schlußfolgerungen dahin, daß, wenn wieder

$x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ gesetzt wird,

$r^n\cos n\varphi = -1$, und $r^n\sin n\varphi = 0$, also wieder

$\sin n\varphi = 0$, $r = 1$, und $\cos n\varphi = -1$, daher $n\varphi = (2\varkappa+1)\pi$ und

$$\varphi = \frac{2\varkappa+1}{n}\pi$$

sein muß. Die Wurzeln der Gleichung $x^n = -1$ besitzen also die Form

$$x = \cos\frac{2\varkappa+1}{n}\pi + i\sin\frac{2\varkappa+1}{n}\pi,$$

wobei $\varkappa$ dieselbe Bedeutung wie oben hat. — Die Wurzeln der Gleichung $x^n = -1$ sind demnach,

1) wenn n eine gerade Zahl ist:

$$\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n};\qquad \cos\frac{\pi}{n} - i\sin\frac{\pi}{n};$$
$$\cos\frac{3\pi}{n} + i\sin\frac{3\pi}{n};\qquad \cos\frac{3\pi}{n} - i\sin\frac{3\pi}{n};$$
$$\vdots\qquad\qquad\vdots$$
$$\cos\frac{n-1}{n}\pi + i\sin\frac{n-1}{n}\pi;\quad \cos\frac{n-1}{n}\pi - i\sin\frac{n-1}{n}\pi;$$

2) wenn n eine ungerade Zahl ist:

$$\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n};\qquad \cos\frac{\pi}{n} - i\sin\frac{\pi}{n};$$
$$\cos\frac{3\pi}{n} + i\sin\frac{3\pi}{n};\qquad \cos\frac{3\pi}{n} - i\sin\frac{3\pi}{n};$$
$$\vdots\qquad\qquad\vdots$$
$$\cos\frac{n-2}{n}\pi + i\sin\frac{n-2}{n}\pi;\quad \cos\frac{n-2}{n}\pi - i\sin\frac{n-2}{n}\pi;$$
$$-1.$$

Beispiel. Die 5 Wurzeln der Gleichung $x^5 = -1$ sind also

-1; $\cos 36 \pm i\sin 36^0$; $\cos 108^0 \pm i\sin 108^0$, oder

$$-1;\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \pm \frac{i}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}};\ \frac{1-\sqrt{5}}{4} \pm \frac{i}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}.$$

§ 172. Aufgabe.

Die binomische Gleichung $x^n = a \pm bi$, in welcher a und b positive reelle Zahlen sind, aufzulösen.

Aufl. Man bringe die complexe Zahl $a \pm bi$ auf die Form $r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$, indem man den absoluten Werth von $\sqrt{a^2+b^2}$ mit r bezeichnet und den Winkel φ in den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ so bestimmt, daß $\operatorname{tang}\varphi = \frac{b}{a}$ ist. Dann muß

$$x^n = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi), \text{ und also } x = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{2\varkappa\pi+\varphi}{n} \pm i\sin\frac{2\varkappa\pi+\varphi}{n}\right),$$

oder

$$x = \sqrt[2n]{a^2+b^2}\left\{\cos\frac{1}{n}\left(2\varkappa\pi + \text{arc. tang}\frac{b}{a}\right) \pm i\sin\frac{1}{n}\left(2\varkappa\pi + \text{arc. tang}\frac{b}{a}\right)\right\}$$

sein; $\varkappa$ hat wieder die sämmtlichen Werthe der Reihe $0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm\left(\frac{n}{2}-1\right), +\frac{n}{2}$, oder der Reihe $0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm\frac{n-1}{2}$, zu durchlaufen, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Zusatz 1. Die Lösung der Gleichung $x^n = -a \mp bi$ unterscheidet sich von der vorhergehenden nur dadurch, daß $2\varkappa + 1$ an Stelle von $2\varkappa$ zu setzen ist.

Zusatz 2. Für $b = 0$ sind in den beiden vorhergehenden Formeln die Formeln zur Lösung der Gleichungen

$$x^n = \pm a$$

enthalten.

Anmerkung. Aus der Lösung dieser Gleichungen geht auch hervor, daß jede Wurzel aus einer beliebigen Zahl ebenso viele verschiedene Werthe besitzt, als der Wurzelexponent angiebt. Vergl. § 101 u. 104.

Druckfehler.

S. 48 Z. 2 v. u. lies $-2\cdot XII^4$ statt $=2\cdot XII^4$.

„ 70 Z. 6 v. u. l. $(\sqrt{12}-2\sqrt{7})$ statt $(\sqrt{12}-2\sqrt{7})$.

„ 72 Z. 2 v. o. l. $\frac{-8+12\sqrt{2}-4\sqrt{10}+8\sqrt{5}}{32-16}$ statt $\frac{-8+12\sqrt{2}-4\sqrt{10}-8\sqrt{5}}{32-16}$.

„ 102 Z. 8 v. u. muß das Zeichen $-$ vor $+\frac{\alpha^2\beta}{16}$ gestrichen werden.

„ 109 Z. 1 v. o. lies b statt b_1.

Verlag der Weidmannschen Buchhandlung (J. Reimer) in Berlin.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.